1 Anhang

Wir wollen gebundene, resonante Streuzustände für S-Wellen ($l = 0$) an einem kugelsymmetrischen Potentialtopf

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für} \quad r < R \\ 0 & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

untersuchen. Dazu verwendet man die Notation $k_0^2 = 2\mu V_0/\hbar^2$, $K^2 = 2\mu(V_0 + E)/\hbar^2$, $\kappa^2 = -2\mu E/\hbar^2$.

1.1 Teil $E < 0$

Sei zunächst $E < 0$. Man soll die folgende Form für die Lösung der Radialgleichung (für allgemeine l) begründen:

$$R_{nl}(r) = \begin{cases} A_{nl} j_l(K_{nl} r) & \text{für} \quad r < R \\ B_{nl} H_l^{(+)}(i\kappa_{nl} r) & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

wobei $H_{nl}^{(\pm)}(\rho) = -n_l(\rho) \pm i j_l(\rho)$ und

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \left(\frac{\sin\rho}{\rho}\right), \qquad n_l(\rho) = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \left(\frac{\cos\rho}{\rho}\right)$$

Für $r < R$ verwendet man die bei $r = 0$ regulären sphärischen Besselfunktionen, die wie man gesehen hat, die Radialgleichung löst. Die Neumannfunktionen kommen nicht in Frage, da diese ein singuläres Verhalten bei $r = 0$ haben.
Für $r > R$ ist die Wellenzahl κ_{nl} rein imaginär, man benötigt also ein exponentielles Abklingen der Wellenfunktion, was nur die Henkelfunktionen leisten können.
Für $\rho \to \infty$ gilt jedoch wegen dem asymptotischen Verhalten von $n_l(\rho)$ und $j_l(\rho)$:

$$\begin{aligned} H_{nl}^{(\pm)}(\rho) &= -n_l(\rho) \pm i j_l(\rho) \\ &\to \frac{1}{\rho}\cos\left(\rho - l\frac{\pi}{2}\right) \pm i\frac{1}{\rho}\sin\left(\rho - l\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\cos\left(\rho - l\frac{\pi}{2}\right) \pm i\sin\left(\rho - l\frac{\pi}{2}\right)}{\rho} \\ &= \frac{\exp\left[\pm i\left(\rho - l\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\rho} \end{aligned}$$

Dadurch wird klar, dass nur $H_{nl}^{(+)}$ in Frage kommt, da $H_l^{(-)}$ divergiert.
Gewinnen Sie (im Fall $l = 0$) durch Aufstellen der Anschlußbedingungen bei $r = R$ eine Bedingung für V_0 und R, die erfüllt sein muss, damit es N gebundene S-Zustände gibt.
Mit

$$\begin{aligned} j_0(\rho) &= \frac{\sin\rho}{\rho}, \qquad n_0(\rho) = -\frac{\cos\rho}{\rho} \\ H_0^{(+)}(\rho) &= \frac{\cos\rho}{\rho} + i\frac{\sin\rho}{\rho} = \frac{\exp(i\rho)}{\rho} \end{aligned}$$

ist die Lösung:

$$R_{n0}(r) = \begin{cases} A_{n0} j_0 (K_{n0} r) & \text{für} \quad r < R \\ B_{n0} H_0^{(+)} (i\kappa_{n0} r) & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

$$R_{n0}(r) = \begin{cases} A_{n0} \frac{\sin(K_{n0} r)}{K_{n0} r} & \text{für} \quad r < R \\ B_{n0} \frac{\exp(-\kappa_{n0} r)}{i\kappa_{n0} r} & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

$$\frac{d}{dr} R_{n0}(r) = \begin{cases} A_{n0} \left(\frac{\cos(K_{n0} r)}{r} - \frac{\sin(K_{n0} r)}{K_{n0} r^2} \right) & \text{für} \quad r < R \\ B_{n0} \left(\frac{-\exp(-\kappa_{n0} r)}{ir} - \frac{\exp(-\kappa_{n0} r)}{i\kappa_{n0} r^2} \right) & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

Aus den Anschlussbedingungen folgt wegen der Stetigkeit an $r = R$:

$$\begin{aligned} B_{n0} \frac{\exp(-\kappa_{n0} R)}{i\kappa_{n0} R} &= A_{n0} \frac{\sin(K_{n0} r)}{K_{n0} r} \\ B_{n0} &= A_{n0} \frac{i\kappa_{n0}}{K_{n0}} \sin(K_{n0} R) \exp(\kappa_{n0} R) \end{aligned}$$

und wegen der Stetigkeit der Ableitung:

$$\begin{aligned} A_{n0} \left[\frac{\cos(K_{n0} R)}{R} - \frac{\sin(K_{n0} R)}{K_{n0} R^2} \right] &= -B_{n0} \left[\frac{\exp(-\kappa_{n0} R)}{iR} + \frac{\exp(-\kappa_{n0} R)}{i\kappa_{n0} R^2} \right] \\ \cos(K_{n0} R) - \frac{\sin(K_{n0} R)}{K_{n0} R} &= -\frac{B_{n0}}{iA_{n0}} \exp(-\kappa_{n0} R) \frac{1}{\kappa_{n0} R} (\kappa_{n0} R + 1) \\ \cos(K_{n0} R) - \frac{\sin(K_{n0} R)}{K_{n0} R} &= -\frac{\sin(K_{n0} R)}{K_{n0} R} (\kappa_{n0} R + 1) \\ \cos(K_{n0} R) &= -\frac{\sin(K_{n0} R)}{K_{n0} R} (\kappa_{n0} R + 1) + \frac{\sin(K_{n0} R)}{K_{n0} R} \\ \tan(K_{n0} R) &= \frac{\sin(K_{n0} R)}{\cos(K_{n0} R)} = -\frac{K_{n0}}{\kappa_{n0}} \\ \tan(K_{n0} R) &= -\frac{K_{n0}}{\kappa_{n0}} = -\sqrt{\frac{2\mu (V_0 + E)/\hbar^2}{-2\mu E/\hbar^2}} = -\sqrt{-\left(\frac{V_0}{E} + 1 \right)} \quad (*) \end{aligned}$$

Die linke Seite ist immer reell, die rechte nur wenn $\frac{V_0}{E} + 1 \leq 0$ ist.
Damit es N gebundene S-Zustände geben kann, muss also V_0 auf jeden Fall diese Bedingung erfüllen:

$$-V_0 \leq E < 0$$

Damit ist jedoch nur eine notwendige Bedingung erfüllt.
Die Bedingung

$$\tan(K_{n0} R) = -\frac{K_{n0}}{\kappa_{n0}}$$

entspricht **exakt** der Bedingung, die auf Blatt 2 Aufgabe 3. Dort wurde gezeigt, dass für N Bindungszustände gelten muss:

$$
\begin{aligned}
V_0 &\geq \frac{\hbar^2}{2\mu R^2}\left(N\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8\mu R^2}(2N+1)^2 \\
k_0 R &= \sqrt{\frac{2\mu R^2}{\hbar^2}V_0} \geq \frac{\pi}{2}(2N+1)
\end{aligned}
$$

1.2 Teil $E > 0$

Für den Fall $E > 0$ ist dieser Ansatz für die Radialwellenfunktion zweckmäßig $\left(k^2 = 2\mu E/\hbar^2\right)$:

$$
R_l(r) = \begin{cases} A_l j_l(Kr) & \text{für} \quad r < R \\ B_l\left[\cos\delta_l j_l(kr) - \sin\delta_l n_l(kr)\right] & \text{für} \quad r > R \end{cases}
$$

Man kennt das asymptotische Verhalten von $j_l(\rho)$ und $n_l(\rho)$ und erhält damit:

$$
\begin{aligned}
R_l(r) &= B_l\left[\cos\delta_l j_l(kr) - \sin\delta_l n_l(kr)\right] \overset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} B_l\left[\cos\delta_l \frac{1}{kr}\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right) + \sin\delta_l \frac{1}{kr}\cos\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{B_l}{kr}\left[\cos\delta_l \sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right) + \sin\delta_l \cos\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{B_l}{kr}\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l\right)
\end{aligned}
$$

Also ist δ_l tatsächlich die Streuphase. Nun soll man die Streuphase δ_0 sowie den totalen Wirkungsquerschnitt σ_0 für S-Streuung ($l = 0$) bestimmen.

$$
j_0(\rho) = \frac{\sin(\rho)}{\rho}, \qquad n_0(\rho) = -\frac{\cos\rho}{\rho}
$$

Also ist:

$$
\begin{aligned}
R_0(r) &= \begin{cases} A_0 \frac{\sin(Kr)}{Kr} & \text{für} \quad r < R \\ \frac{B_0}{kr}\left[\cos\delta_0 \sin(kr) + \sin\delta_0 \cos(kr)\right] & \text{für} \quad r > R \end{cases} \\
R_0(r) &= \begin{cases} \frac{A_0}{Kr}\sin(Kr) & \text{für} \quad r < R \\ \frac{B_0}{kr}\sin(kr + \delta_0) & \text{für} \quad r > R \end{cases} \\
\frac{d}{dr}R_0(r) &= \begin{cases} \frac{A_0}{r}\cos(Kr) - \frac{A_0}{Kr^2}\sin(Kr) & \text{für} \quad r < R \\ \frac{B_0}{r}\cos(kr + \delta_0) - \frac{B_0}{kr^2}\sin(kr + \delta_0) & \text{für} \quad r > R \end{cases}
\end{aligned}
$$

Mit den Anschlussbedingungen hat man:

$$
B_0 = A_0 \frac{k}{K}\frac{\sin(KR)}{\sin(kR + \delta_0)}
$$

und wegen der Stetigkeit der Ableitung:

$$
\begin{aligned}
\frac{A_0}{R}\cos(KR) - \frac{A_0}{KR^2}\sin(KR) &= \frac{B_0}{R}\cos(kR + \delta_0) - \frac{B_0}{kR^2}\sin(kR + \delta_0) \\
\frac{A_0}{R}\cos(KR) - \frac{A_0}{KR^2}\sin(KR) &= \frac{A_0}{R}\frac{k}{K}\frac{\sin(KR)}{\sin(kR + \delta_0)}\cos(kR + \delta_0) - \frac{A_0}{KR^2}\sin(KR) \\
\cos(KR)\sin(kR + \delta_0) &= \frac{k}{K}\sin(KR)\cos(kR + \delta_0) \\
\frac{\sin(kR + \delta_0)}{\cos(kR + \delta_0)} &= \frac{k}{K}\frac{\sin(KR)}{\cos(KR)} \\
\tan(kR + \delta_0) &= \frac{k}{K}\tan(KR)
\end{aligned}
$$

Also hat man die Streuphase:

$$\delta_0 = \arctan\left(\frac{k}{K}\tan(KR)\right) - kR + n\pi$$

Damit hat man auch den Wirkungsquerschnitt σ_0, da aus der Vorlesung bekannt ist:

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k^2}\left[\frac{\tan^2\delta_0}{1+\tan^2\delta_0}\right] = \frac{4\pi}{k^2}\left[\frac{1}{\tan^2\delta_0}+1\right]^{-1} \\
&= \frac{4\pi}{k^2}\left[\frac{1}{\tan^2\left(\arctan\left(\frac{k}{K}\tan(KR)\right) - kR\right)}+1\right]^{-1} \\
&\approx \frac{4\pi}{k^2}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{k}{K}\tan(KR)\right)^2}\right]^{-1} = \frac{4\pi}{k^2}\left[1+\frac{1}{k^2}\left(\frac{K}{\tan(KR)}\right)^2\right]^{-1} \\
\sigma_0 &= 4\pi R^2\left[(kR)^2 + \left(\frac{KR}{\tan(KR)}\right)^2\right]^{-1}
\end{aligned}$$

(Ohne Hinweis vom Blatt :-)
Für welche k_0R gibt es also Resonanz?
Damit der Wirkungsquerschnitt σ_0 groß wird, muss $\frac{KR}{\tan(KR)}$ klein werden. Dies tritt genau bei den Singularitäten von $\tan(KR)$ auf. Die Singularitäten liegen bei $KR = (2n+1)\frac{\pi}{2}$:

$$KR = (2n+1)\frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} \approx k_0R$$

Resonanzen treten also auf, wenn $k_0R \approx n\pi + \frac{\pi}{2}$ ist.
Nun stellt sich die Frage, wie das Auftreten der Resonanzen im Verhältnis zu den gebundenen Zuständen aus Teil (i) steht.

$$\begin{aligned}
\text{Für die Resonanzen gilt:} \quad & k_0R \approx n\pi + \tfrac{\pi}{2} \\
\text{Die Bedingung für gebundeneZustände ist:} \quad & k_0R \geq \tfrac{\pi}{2}(2N+1) = N\pi + \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Die Resonanzen treten also bei den Stellen auf, ab denen neue gebundene Zustände möglich werden.

(Auszug aus QM I Übungsblatt 12 von Fred Stober)