

Theoretische Teilchenphysik

Dozent: Prof. Dr. Ulrich Nierste
Skript¹: Fred-Markus Stober und U. Nierste

7. August 2007

¹Aktuelle Version: <http://www.fredstober.de>

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
1.1	Überblick	4
1.1.1	„Landkarte der Quantenfeldtheorie“	6
1.2	Konventionen	7
1.2.1	Metrik	7
1.2.2	Levi-Civita-Tensor	7
1.2.3	Summenkonvention	8
2	Lorentzgruppe und Poincarégruppe	9
2.1	Lorentzgruppe	9
2.1.1	Raum- und Zeitspiegelung	9
2.1.2	Rotationen	10
2.1.3	Lie-Algebra	11
2.1.4	Darstellungen und Feldgleichungen	12
2.2	Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$	17
2.3	Casimir-Operatoren	18
3	Lagrangeformalismus der Felder	20
3.1	Bewegungsgleichungen	20
3.2	Noether-Theorem	25
4	Kanonische Feldquantisierung	31
4.1	Reelles Klein-Gordon-Feld	31
4.2	Komplexes Klein-Gordon-Feld	49
4.3	Dirac-Feld	50
5	Wechselwirkende Felder	54
5.1	Operatorformalismus für KG-Felder	54
5.1.1	Källén-Lehmann-Spektraldarstellung	58
5.1.2	Asymptotische Zustände	61
5.1.3	Nützliches aus der Graphentheorie:	77
5.1.4	Komplexes KG-Feld:	80
5.2	Feynman Regeln für Dirac-Felder:	82
5.2.1	Feynmanregeln für Dirac-Fermionen mit Yukawa-Wechselwirkung	85
5.3	Zerfallsrate und Streuquerschnitt	86
5.3.1	Feynman-Regeln für massive Vektorbosonen	87
5.3.2	Z-Zerfall in Fermion-Antifermion-Paar	90
5.3.3	Dreikörperzerfälle	96
5.3.4	Streuquerschnitt	102
5.4	Quantenelektrodynamik	110
5.4.1	Eichfixierung	113
5.4.2	Feynman-Regeln der QED	118
5.4.3	Diagrammatischer Beweis der Ward-Identität	119
5.4.4	Anwendung: Myon-Paarproduktion in e^+e^- -Kollisionen	123

5.4.5	Crossing-Symmetrie	125
6	Das Standardmodell	130
6.1	Nichtabelsche Eichtheorien	130
6.1.1	Allgemeine Aussagen über $SU(N)$:	132
6.1.2	$SU(N)$ - Eichtheorie	135
6.1.3	Quantenchromodynamik (QCD):	139
6.2	Spontane Symmetriebrechung	144
6.2.1	Goldstone-Theorem	145
6.2.2	Higgs-Mechanismus	149
6.2.3	Übersicht über das Standardmodell	160
6.3	Yukawa-Sektor	161
6.3.1	Yukawa-Wechselwirkung	163
6.4	CP -Verletzung und Baryogenese	180
6.4.1	Baryonen-Asymmetrie des Universums (BAU)	180
6.5	Schleifen / Loops	183
6.5.1	Beispiel: QED-Korrekturen zur μ - Paarproduktion in e^+e^- - Kollisionen	184
6.5.2	Algorithmische Berechnung der Ein-Schleifen-Integrale	190
6.5.3	LSZ-Reduktionsformel	197
6.5.4	Faddeew-Popow-Geistfelder	202

Lehrbücher

- [Kugo] Kugo, Taichiro: *Eichtheorie*, Springer
- [Peskin] Peskin, Michael E. and Schroeder, Daniel V.: *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley
- [1] Bailin, David and Love, Alexander: *Introduction to gauge field theory*, Hilger
- [Ramond] Ramond, Pierre: *Field theory*, Addison-Wesley
- [2] Nachtmann, Otto: *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg
- [3] Cheng, Ta-Pei and Li, Ling-Fong: *Gauge theory of elementary particle physics*, Clarendon Pr.
- [4] Bjorken, James D. and Drell, Sidney D.: *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI-Wiss.-Verl.
- [Kaku] Kaku, Michio: *Quantum field theory*, Oxford University Press
- [Sternan] Sterman, George: *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press
- [Weinberg] Weinberg, Steven: *The quantum theory of fields*, Cambridge University Press
- [5] Itzykson, Claude and Zuber, Jean-Bernard: *Quantum field theory*, McGraw-Hill

[6] Halzen, Francis and Martin, Alan D., *Quarks and leptons*, Wiley

[Pokorski] Pokorski, Stefan: *Gauge field theories*, Cambridge University Press

URLs:

<http://pdg.lbl.gov>

<http://www.slac.stanford.edu/spires/hep>

<http://arxiv.org>

<http://www.cern.ch>

Particle Data Group

Datenbank SPIRES für Publikationen

Preprint-Archiv

CERN

1 Einführung

1.1 Überblick

Elementarteilchenphysik = Hochenergiephysik

Grundlage: Quantenfeldtheorie

Teilchen $\leftrightarrow$ Anregungszustände von Quantenfeldern

Zentrale Fragen

1. Welche fundamentale Teilchen (Quantenfelder) gibt es?
2. Welche Wechselwirkungen wirken zwischen ihnen?
3. Welchen Symmetrien unterliegen Teilchen und Wechselwirkungen?

kurze Abstände $\leftrightarrow$ hohe Energien $\leftrightarrow$ frühe Zeiten nach dem Urknall

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} = \frac{\hbar c}{0,2 \text{ GeV}}$$

1 GeV $\simeq$ Mittlere Energie aller Teilchen 10^{-4} s nach dem Urknall
als es eine Temperatur von $\frac{1 \text{ GeV}}{k_B} = 10^{13} \text{ K}$ ($= 10^{-10} \frac{\text{J}}{k_B}$) hatte.

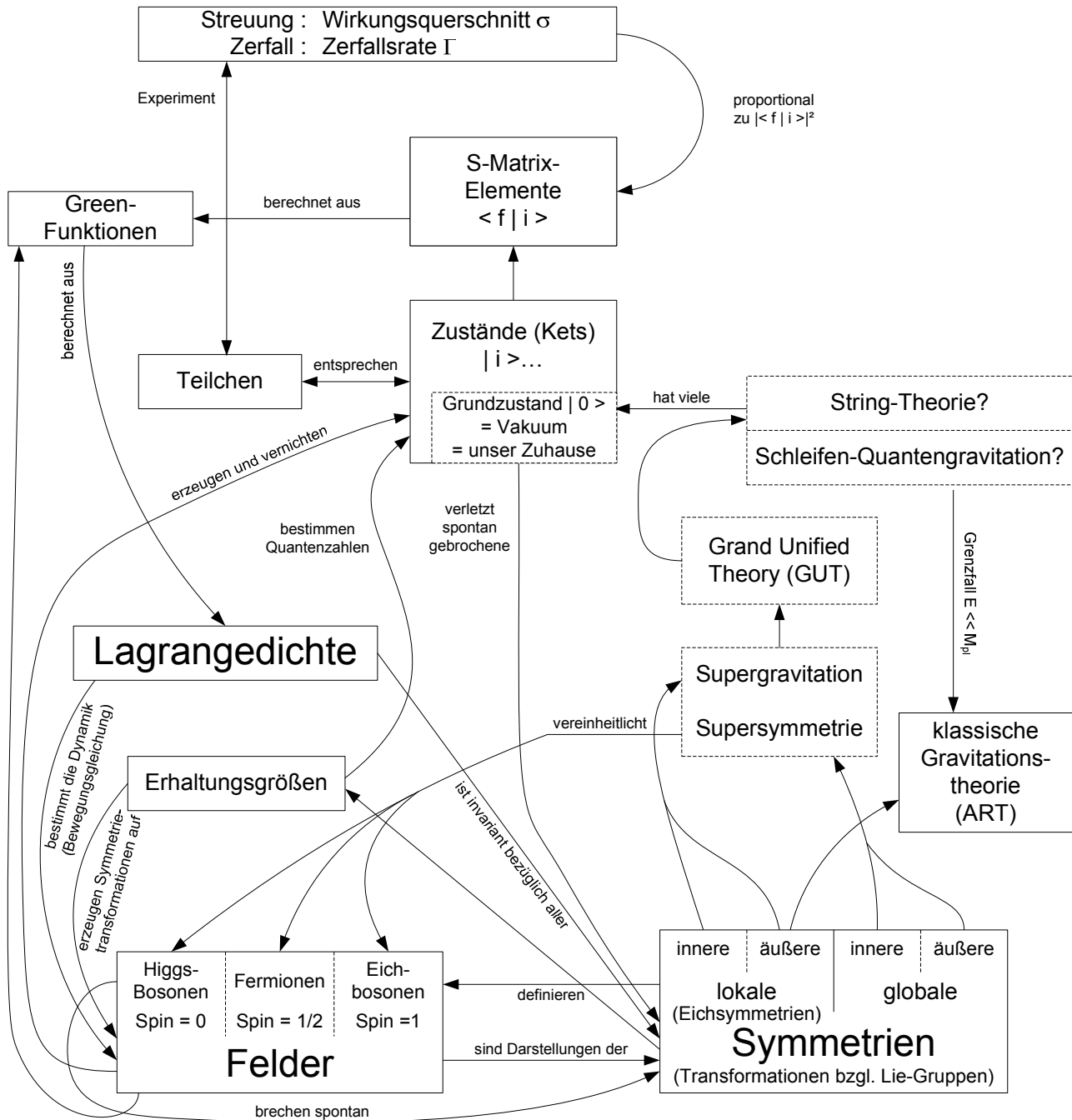
$$1 \text{ GeV} = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$\frac{1 \text{ GeV}}{c^2} = 1,8 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Energieskala	phy. Relevanz	Längenskala	Zeit nach dem Urknall ¹
Planck-Skala 10^{19} GeV	(Quanten-)Gravitation	10^{-35} m	$\leq 10^{-43}$ s 10^{32} K
GUT-Skala 10^{16} GeV?	Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen	10^{-32} m	10^{-37} s 10^{29} K
10^{10} GeV – 10^{16} GeV?	Masse rechtshändiger Neutrinos? Leptogenese? Baryogenese?	10^{-26} m – 10^{-32} m	10^{-32} s – 10^{-26} s 10^{23} K – 10^{26} K
10^2 GeV – 10^4 GeV	Mechanismus zur Stabilisierung der elektroschwachen Skala Leptogenese? Baryogenese?	10^{-18} m – 10^{-20} m	10^{-14} s – 10^{-10} s 10^{15} K – 10^{17} K
elektroschwache Skala 10^2 GeV	Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung, Higgs-Physik? Masse von W und Z - Boson	Reichweite der schwachen Wechselwirkung 10^{-18} m	10^{-10} s 10^{15} K
hadronische Skala 200 MeV – 2 GeV	Confinement der Quarks, Massen der leichten Hadronen (p, n)	Nukleonradius 10^{-15} m – 10^{-16} m	10^{-4} s 10^{13} K
0,05 eV – 1 eV	Massen der Neutrinos	10^{-6} m – 10^{-7} m (irrelevant)	10^5 y – 10^6 y 10^3 K – 10^5 K
0	Masse des Photons, des Gluons und des Gravitons	Reichweite der el. mag. WW und der Gravitation ∞	

¹Temperatur $T = 10^{10}$ K $\cdot \sqrt{\frac{s}{t}}$

1.1.1 „Landkarte der Quantenfeldtheorie“



1.2 Konventionen

Natürliche Einheiten (Planck-Einheiten):

- $c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \equiv 1 \Rightarrow 1 \text{ s} = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m}$
- $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6,6 \cdot 10^{-25} \text{ GeV s} \equiv 1 \Rightarrow 1 \text{ s} = 1,5 \cdot 10^{24} \text{ GeV}^{-1}$
 $\hbar c = 1 \Rightarrow 1 \text{ m} = 5,1 \cdot 10^{15} \text{ GeV}^{-1}$
 $m = \frac{E_{\text{Ruhe}}}{c^2} = E_{\text{Ruhe}} \Rightarrow 1 \text{ kg} = 5,5 \cdot 10^{26} \text{ GeV}$
- el. Elementarladung $e > 0$
 $\frac{e^2}{4\pi} = \alpha \approx \frac{1}{137, \dots}$ ist Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante $\Rightarrow e = 0,30$
 e ist dimensionslos! Coulomb-Potential eines H-Atoms: $V(r) = -\frac{e^2}{r}$

Alle physikalischen Einheiten sind Potenzen der Energie. Der Exponent heißt (Massen-) **Dimension**. Man schreibt:

$$[\text{Länge}] = [\text{Zeit}] = -1, \quad [\text{Masse}] = 1, \quad [e] = 0$$

1.2.1 Metrik

$$g = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}$$

1.2.2 Levi-Civita-Tensor

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{für gerade} \\ -1 & \text{für ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ Permutation } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \mu & \nu & \rho & \sigma \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{0123} = +1 \Rightarrow \varepsilon_{0123} &= g_{0\mu} g_{1\nu} g_{2\rho} g_{3\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} \varepsilon^{0123} \\ &= -\varepsilon^{0123} = -1 \end{aligned}$$

$$\varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \text{ d.h. } \varepsilon^{12} = 1 \quad (2)$$

1.2.3 Summenkonvention

Über wiederkehrende Indizes wird summiert:

$$a_i b_i = \sum_i a_i b_i$$
$$\text{Meist: } a_\mu b^\mu = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu$$

Bei Vierervektoren laufen griechische Indizes von 0 bis 3 und lateinische von 1 bis 3.

2 Lorentzgruppe und Poincarégruppe

2.1 Lorentzgruppe

$$\begin{array}{cc} \text{kontravariant} & \text{kovariant} \\ x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} & x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \end{array}$$

Skalarprodukt: $x \cdot y = x_\mu y^\mu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$, $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ $g_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu$.

Die linearen Transformationen

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (3)$$

$$\text{mit} \quad x'_\mu y'^\mu = x_\mu y^\mu \quad \text{für alle } x, y \quad (4)$$

bilden die Lorentzgruppe $\mathcal{L} = \text{O}(1, 3) = \text{O}(3, 1)$ und (3) heißt **Lorentz-Transformation**.

$$(4) \Rightarrow g = \Lambda^\top g \Lambda \quad (5)$$

$$\Rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \quad (6)$$

Lorentz-Transformationen aus

1. $\mathcal{L}_+^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = +1, \Lambda_0{}^0 \geq +1\}$ heißen **eigentlich orthochron**.
2. $\mathcal{L}_+^\downarrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = +1, \Lambda_0{}^0 \leq -1\}$ heißen **eigentlich nicht-orthochron**.
3. $\mathcal{L}_-^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = -1, \Lambda_0{}^0 \geq +1\}$ heißen **uneigentlich orthochron**.
4. $\mathcal{L}_-^\downarrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = -1, \Lambda_0{}^0 \leq -1\}$ heißen **uneigentlich nicht-orthochron**.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$$

2.1.1 Raum- und Zeitspiegelung

$$P = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_-^\uparrow = P\mathcal{L}_+^\uparrow \quad (7)$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_-^\downarrow = T\mathcal{L}_+^\uparrow \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_+^\downarrow = PT\mathcal{L}_+^\uparrow$$

$\mathcal{L}_+^\uparrow$ und

$$\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow = \text{SO}(3, 1) = \text{SO}(1, 3) \quad (9)$$

sind Untergruppen von $\mathcal{L}$. (Ebenso $\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow$ und $\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$.) SO steht für „spezielle orthogonale Gruppe“ und (1, 3) gibt die Signatur der Metrik an. Naturgesetze sind invariant unter $\mathcal{L}_+^\uparrow$ („lorentzinvariant“).

2.1.2 Rotationen

$\mathcal{L}_+^\uparrow$ enthält **Rotationen**:

$$\Lambda(0, \vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R(\vec{\varphi}) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (10)$$

mit Achse $\frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}$ und Winkel $\varphi = |\vec{\varphi}|$

$$R(\vec{\varphi})_{ij} = \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi^2} + \left(\delta_{ij} - \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi^2} \right) \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \varepsilon_{ijk} \varphi_k \quad (11)$$

Ein reiner (d.h. ohne Rotation) **Boost** in ein sich mit Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ bewegendes Bezugssystem ist:

$$\Lambda(\vec{u}, 0) = \begin{pmatrix} \cosh u & -\frac{\vec{u}}{u} \sinh u \\ -\frac{\vec{u}}{u} \sinh u & \mathbf{1}_{3 \times 3} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}^\top}{u^2} (\cosh u - 1) \end{pmatrix} \quad (12)$$

mit der **Rapidity** $u = \text{arctanh} |\vec{v}|$ und $\vec{u} = u \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Für $\vec{u}_1 \uparrow \vec{u}_2$ ist

$$\Lambda(\vec{u}_1, 0) \Lambda(\vec{u}_2, 0) = \Lambda(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, 0)$$

Generatoren J_k und K_j ($j, k = 1, 2, 3$):

$$\Lambda(0, \vec{\varphi}) = \exp(i \vec{\varphi} \cdot \vec{J}) \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } [J_k]_{lm} &= -i \varepsilon_{klm} \text{ und } [J_k]_{0\mu} = [J_k]_{\mu 0} = 0 \\ \Rightarrow [J_k]_{\lambda\mu} &= -i \varepsilon_{0k\lambda\mu} \end{aligned} \quad (13b)$$

($[J_k]_{lm}$ hieß $\omega^{(k)}_{lm}$ in der QM-II-Vorlesung.)

$\Lambda(\vec{u}, 0) = \exp(i \vec{u} \cdot \vec{K})$ mit $[K_j]_{\lambda\mu} = i \delta_{\lambda 0} \delta_{j\mu} + i \delta_{0\mu} \delta_{\lambda j}$, also:

$$K_j = i \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$J_k = J_k^\dagger \text{ und } K_j = -K_j^\dagger$$

2.1.3 Lie-Algebra

$$[J_k, J_l] = i\varepsilon_{klm} J_m \text{ (Drehimpulsalgebra)} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} [K_j, K_n]_{\lambda\sigma} &= [K_j]_{\lambda\mu} [K_n]_{\mu\sigma} - [K_n]_{\lambda\mu} [K_j]_{\mu\sigma} \\ &\stackrel{(14)}{=} i^2 [(\delta_{\lambda 0} \delta_{j\mu} + \delta_{0\mu} \delta_{\lambda j}) (\delta_{\mu 0} \delta_{n\sigma} + \delta_{0\sigma} \delta_{\mu n}) - (n \longleftrightarrow j)] \\ &\stackrel{\Sigma_{\mu=0}^3}{=} i^2 [(\delta_{\lambda 0} \delta_{j0} \delta_{n\sigma} + \delta_{\lambda j} \delta_{n\sigma} + \delta_{\lambda 0} \delta_{\sigma 0} \delta_{jn} + \delta_{0n} \delta_{0\sigma} \delta_{\lambda j}) - (n \longleftrightarrow j)] \\ &\stackrel{j,n \geq 1}{=} i^2 [(\delta_{\lambda j} \delta_{n\sigma} + \delta_{\lambda 0} \delta_{\sigma 0} \delta_{jn}) - (n \longleftrightarrow j)] \\ &= i^2 [\delta_{\lambda j} \delta_{n\sigma} - \delta_{n\lambda} \delta_{j\sigma}] \text{ da } \delta_{\lambda 0} \delta_{\sigma 0} \delta_{jn} \text{ symmetrisch. bzgl. } n \leftrightarrow j \text{ ist,} \\ &= i^2 \varepsilon_{jnk} \varepsilon_{0k\lambda\sigma} \stackrel{(13b)}{=} -i \varepsilon_{jnk} [J_k]_{\lambda\sigma} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [K_j, K_n] = -i \varepsilon_{jnk} J_k \quad (16)$$

$$\text{Ebenso: } [J_k, K_l] = i \varepsilon_{klm} K_m \quad (17)$$

Dramatische Vereinfachung:

$$N_j^+ = \frac{1}{2} (J_j + iK_j) \quad (18a)$$

$$N_j^- = \frac{1}{2} (J_j - iK_j) \quad (18b)$$

$$N_j^{+\dagger} = N_j^+ \text{ und } N_j^{-\dagger} = N_j^- \quad (18c)$$

$$\begin{aligned} [N_j^+, N_k^-] &= \frac{1}{4} \{ [J_j, J_k] + i [K_j, J_k] - i [J_j, K_k] + [K_j, K_k] \} \\ &= \frac{i}{4} [\varepsilon_{jkl} J_l + \varepsilon_{jkl} K_l - \varepsilon_{jkl} K_l - \varepsilon_{jkl} J_l] = 0 \quad \text{mit (15) - (17), (19a)} \end{aligned}$$

$$\text{Ebenso: } [N_j^+, N_k^+] = i \varepsilon_{jkl} N_l^+ \quad (19b)$$

$$[N_j^-, N_k^-] = i \varepsilon_{jkl} N_l^- \quad (19c)$$

1. Die Lie-Algebren N_j^+ und N_j^- entkoppeln.

2. (19) ist die Lie-Algebra von SU(2).

Jedes $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \Lambda = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{N}^+) \exp(i\vec{\alpha}^* \cdot \vec{N}^-) &= \exp\left(i(\vec{\alpha} \cdot \vec{N}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{N}^-)\right) \\ &\text{wegen } [\vec{\alpha} \cdot \vec{N}^+, \vec{\alpha}^* \cdot \vec{N}^-] = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

(SU(4) $\simeq$ SU(2) $\otimes$ SU(2), aber $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ist einfach.)

Mit (19) können wir die Darstellungstheorie von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ aus der von SU(2) gewinnen.

$\Rightarrow$ Spin-Quantenzahlen $s = 0, 1/2, 1, \dots$

Sind $D^{s_1}(\vec{\alpha})$ und $D^{s_2}(\vec{\alpha})$ zwei Darstellungen der SU(2), so ist (nun mit komplexem α)

$$D^{(s_1, s_2)}(\vec{\alpha}) = D^{s_1}(\vec{\alpha}) \otimes D^{s_2}(\vec{\alpha}^*)$$

eine Darstellung von $\mathcal{L}_+^\dagger$.

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} = \vec{\varphi} \text{ reell} &\Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{N}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{N}^- = \vec{\varphi} \cdot \vec{J} \\ &\text{Drehung } \Lambda(0, \vec{\varphi}) \\ \vec{\alpha} = -i\vec{u} \text{ imaginär} &\Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{N}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{N}^- = \vec{u} \cdot \vec{K} \\ &\text{Boost } \Lambda(\vec{u}, 0) \end{aligned}$$

Parität:

$$\begin{aligned} P : \quad \vec{J} &\rightarrow \vec{J} && (\text{Axialvektor}) \\ \vec{K} &\rightarrow -\vec{K} && (\text{polarer Vektor}) \\ \text{also: } P : \quad \vec{N}^\pm &\rightarrow \vec{N}^\mp \\ D^{(s_1, s_2)} &\rightarrow D^{(s_2, s_1)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Darstellungen mit $s_1 \neq s_2$ verletzen die Parität.

Casimir-Operatoren:

Casimir-Operatoren vertauschen mit allen Darstellungsoperatoren J_k, K_j :

$$\text{SU}(2) : (\vec{N}^\pm)^2 = \frac{1}{4}(\vec{J}^2 - \vec{K}^2 \pm i\vec{J} \cdot \vec{K} \pm i\vec{K} \cdot \vec{J})$$

mit Eigenwerten $s_1(s_1 + 1)$ und $s_2(s_2 + 1)$ in der Darstellung $D^{(s_1, s_2)}$ bzw.

$$\vec{N}^{+2} + \vec{N}^{-2} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{K}^2) \quad (21)$$

mit Eigenwert $s_1(s_1 + 1) + s_2(s_2 + 1)$ und

$$\vec{N}^{+2} - \vec{N}^{-2} = \frac{i}{2}(\vec{J} \cdot \vec{K} + \vec{K} \cdot \vec{J}) \quad (22)$$

mit Eigenwert $s_1(s_1 + 1) - s_2(s_2 + 1)$.

2.1.4 Darstellungen und Feldgleichungen

$\mathbf{D}^{(0,0)}$: skalar:

$$D^{(0,0)}(N_j^+) = D^{(0,0)}(N_j^-) = 0$$

komplexes Klein-Gordon-Feld $\varphi(x)$:

$$\square\varphi + m^2\varphi = \partial_\mu\partial^\mu\varphi + m^2\varphi = 0 \quad (23)$$

$\mathbf{D}^{(0,1/2)}$: rechtshändiger Spinor ξ_a :

$$\left. \begin{array}{l} D(N_j^+) = 0 \\ D(N_j^-) = \frac{\sigma_j}{2} \end{array} \right\} \stackrel{(18)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} D(J_k) = \frac{\sigma_k}{2} \\ D(K_k) = i\frac{\sigma_k}{2} \end{array} \right.$$

$$\Lambda(\vec{u}, \vec{\varphi}) = \exp(i\vec{\varphi} \cdot \vec{J} + i\vec{u} \cdot \vec{K}) \quad (24)$$

wird abgebildet auf

$$\begin{aligned} D^{(0,1/2)}(\Lambda(\vec{u}, \vec{\varphi})) &= \exp\left((i\vec{\varphi} - \vec{u})\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \\ &= \{M \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : \det M = 1\} \end{aligned} \quad (25)$$

und für $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ ist

$$\xi'_a(x') = D^{(0,1/2)}(\Lambda)_a{}^b \xi_b(x) \quad (26)$$

ein „SL(2, $\mathbb{C}$)-2-Spinorfeld“ (Beispiel: Masseloses Anti-Neutrino)

$\mathbf{D}^{(1/2,0)}$: linkshändiger (gepunkteter) Spinor $\eta_{\dot{a}}$ ($\dot{a}$ wird nie mit einem ungepunkteten Index a kontrahiert!):

$$\left. \begin{array}{l} D(N_j^+) = \frac{\sigma_j}{2} \\ D(N_j^-) = 0 \end{array} \right\} \stackrel{(18)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} D(J_k) = \frac{\sigma_k}{2} \\ D(K_k) = -i\frac{\sigma_k}{2} \end{array} \right.$$

(24) wird abgebildet auf

$$D^{(1/2,0)}(\Lambda(\vec{u}, \vec{\varphi})) = \exp\left((i\vec{\varphi} + \vec{u})\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \quad (27)$$

und für $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ ist

$$\eta'^{\dot{a}}(x') = D^{(1/2,0)}(\Lambda)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \eta^{\dot{b}}(x) \quad (28)$$

ein „SL(2, $\mathbb{C}$)-2*-Spinorfeld“

Der antisymmetrische Tensor 2. Stufe,

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist invariant unter SL(2, $\mathbb{C}$)-Transformationen:

$$\varepsilon = M^\top \varepsilon M \text{ für } M \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \quad (29)$$

(Vergleiche mit (5) für metrischen Tensor g)

Beweis von (29):

$$\begin{aligned}
M &\in \mathbb{C}^{2 \times 2} : \\
M^{-1} &= \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det M} \varepsilon M^\top \varepsilon^\top \\
\text{Für } \det M = 1 : &\Rightarrow 1 = M \varepsilon M^\top \varepsilon^\top \\
&\Rightarrow \varepsilon = M \varepsilon M^\top \varepsilon^\top \varepsilon \Rightarrow (29)
\end{aligned}$$

(29) bedeutet, dass (mit $M = D^{(0,1/2)}(\Lambda(\vec{u}, \vec{\varphi}))$):

$$\zeta'^\top \varepsilon \xi' = \zeta^\top M^\top \varepsilon M \xi \stackrel{(29)}{=} \zeta^\top \varepsilon \xi \quad (30)$$

$\zeta^\top \varepsilon \xi$ ist also ein bzgl. $\mathcal{L}_+^\dagger$ Lorentz-invariantes antisymmetrisches (= symplektisches) Produkt: $\zeta^\top \varepsilon \xi = -\xi^\top \varepsilon \zeta$. Dies gilt ebenso für gepunktete Spinoren. Analog zur definierenden Darstellung von $\mathcal{L}$ können wir also das Heben und Senken von Indizes definieren:

$$\xi^a = \varepsilon^{ab} \xi_b \quad (31a)$$

$$\eta^{\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \eta_{\dot{b}} \text{ mit } \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (31b)$$

Das invariante Produkt (30) wird dann zu

$$\zeta^\top \varepsilon \xi = \zeta_a \varepsilon^{ab} \xi_b = \zeta_a \xi^a \quad (32)$$

Auch die Indizes von ε^{ab} kann man senken:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{cd} &= \varepsilon_{ca} \varepsilon^{ab} \varepsilon_{bd} \text{ ist antisymmetrisch} \\
\text{mit } \varepsilon_{21} &= \varepsilon_{2a} \varepsilon^{ab} \varepsilon_{b1} = \varepsilon_{21} \varepsilon^{12} \varepsilon_{21} \\
&\Rightarrow 1 = \varepsilon^{12} \varepsilon_{21} \Rightarrow \varepsilon^{12} = -\varepsilon_{12} \\
\text{also : } \varepsilon^{ab} &= \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}
\end{aligned} \quad (33)$$

$$\text{und: } \varepsilon_{ab} \varepsilon^{bc} = -[\varepsilon^2]_a^{c} = +\delta_a^c = + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Rechte Indizes von ε^{ab} müssen durch Summation über linke Indizes gesenkt werden, sonst gäbe es Widersprüche zu $\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$. Dies ist eine häufige Quelle von Vorzeichenfehlern, z.B. im [Kugo].

Probe:

$$\varepsilon_{ac} \varepsilon^{cd} \varepsilon_{db} = \varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba} = -\varepsilon_{bd} \varepsilon^{dc} \varepsilon_{ca} = -(-\varepsilon_{db})(-\varepsilon^{cd})(-\varepsilon_{ac}) = +\varepsilon_{ac} \varepsilon^{cd} \varepsilon_{db} \quad \checkmark$$

1.

$$\begin{aligned}
\zeta^a &= \varepsilon^{ab} \zeta_b \\
\Rightarrow \varepsilon_{ca} \zeta^a &= \varepsilon_{ca} \varepsilon^{ab} \zeta_b = +\delta_c^b \zeta_b = +\zeta_c \\
\Rightarrow \zeta_c &= +\varepsilon_{ca} \zeta^a
\end{aligned} \tag{35}$$

2.

$$\begin{aligned}
\zeta^\top \xi &= \zeta^a \xi_a \stackrel{(35)}{=} \zeta^a (+\varepsilon_{ab} \xi^b) \\
&= \varepsilon_{ab} \zeta^a \xi^b \\
&= -\varepsilon_{ba} \zeta^a \xi^b = -\zeta_b \xi^b \quad \text{vgl. (32)}
\end{aligned} \tag{36}$$

Merkregel: „+“ für „links oben, rechts unten“

Komplexe Konjugation: $\eta^*_{\dot{a}} := (\eta^*)_a = (\eta_a)^*$
 Gepunkteter Index, weil

$$\begin{aligned}
\eta'^* &\stackrel{(26)}{=} [D^{(0,1/2)}(\Lambda)]^* \eta^* \stackrel{(25)}{=} \left[\exp \left((i\vec{\varphi} + \vec{u}) \left(\frac{-\vec{\sigma}^*}{2} \right) \right) \right] \eta^* \\
&= \underbrace{\varepsilon \exp \left((i\vec{\varphi} + \vec{u}) \frac{\vec{\sigma}}{2} \right) \varepsilon^{-1}}_{D^{(1/2,0)}(\Lambda)} \eta^* \quad \text{da } \varepsilon^{-1}(-\sigma_j^*)\varepsilon = \sigma_j \\
\eta'^*{}_{\dot{a}} &= \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} [D^{(1/2,0)}(\Lambda)]_{\dot{b}}{}^{\dot{c}} \varepsilon_{\dot{c}d} \eta'^*{}^{\dot{d}} \\
\eta'^*{}_{\dot{b}} &= [D^{(1/2,0)}(\Lambda)]_{\dot{b}}{}^{\dot{c}} \eta'^*{}_{\dot{c}}
\end{aligned} \tag{37}$$

Pauli-Matrizen

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} : = (1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (1, \vec{\sigma}) \tag{38a}$$

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} : = (1, -\vec{\sigma}) \tag{38b}$$

mit den üblichen Pauli-Matrizen σ^i , $i = 1, 2, 3$.

$$\Rightarrow (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\beta} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\gamma}\delta} \varepsilon_{\delta\beta} = -(\bar{\sigma}^\mu)^*_{\alpha\dot{\beta}} \tag{39}$$

$$\Rightarrow \text{tr}(\bar{\sigma}_\mu \sigma^\nu) = 2\delta_\mu^\nu, \quad (\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}\beta} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\gamma}\delta} = 2\delta_\alpha^\delta \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}} \tag{40}$$

Weyl-Gleichung

$$P \quad (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \eta^{\dot{\beta}} = 0 \quad (\text{linkshändig}) \tag{41a}$$

$$\begin{array}{c}
\downarrow \\
(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \partial_\mu \eta_\beta = 0 \quad (\text{rechtshändig})
\end{array} \tag{41b}$$

$\mathbf{D}^{(1/2,1/2)}$: $\hat{V}_{\alpha\dot{\beta}}$ Lorentztransformation:

$$\begin{aligned}\hat{V}' &= D^{(0,1/2)}(\Lambda)\hat{V}D^{(0,1/2)}(\Lambda)^\dagger \\ \hat{V}'_{\gamma\dot{\delta}} &= D^{(0,1/2)}_{\gamma}{}^{\alpha}\hat{V}_{\alpha\dot{\beta}}D^{(0,1/2)*\dot{\beta}}{}_{\dot{\delta}}\end{aligned}$$

Man findet aus (25) und (27):

$$\bar{\sigma}^\nu \Lambda_\nu{}^\mu = D^{(0,1/2)\dagger} \bar{\sigma}^\mu D^{(0,1/2)} \quad (42)$$

$$\text{Also: } V^\mu = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha} \hat{V}_{\alpha\dot{\beta}} = \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\sigma}^\mu \hat{V}) \quad (43)$$

transformiert sich wie ein Vierervektor:

$$\begin{aligned}V'^\mu &= \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\sigma}^\mu \hat{V}') = \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\sigma}^\mu D^{(0,1/2)} \hat{V} D^{(0,1/2)\dagger}) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(D^{(0,1/2)\dagger} \bar{\sigma}^\mu D^{(0,1/2)} \hat{V}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\sigma}^\nu \hat{V}) \Lambda_\nu{}^\mu \\ &= \Lambda_\nu{}^\mu V^\nu\end{aligned}$$

$\Rightarrow (1/2, 1/2)$ ist die definierende Darstellung von $\mathcal{L}_+^\dagger$.

Vermöge $\hat{x} = x_\mu \sigma^\mu$ kann man jeden Vierervektor als 2×2 - Matrix schreiben.

$\Rightarrow$ Das gibt die Möglichkeit, Vektorfelder an Spinoren zu koppeln.

$\mathbf{D}^{(0,1/2)} \oplus \mathbf{D}^{(1/2,0)}$: ist reduzible, P-invariante Darstellung:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \text{ Dirac-Spinor in chiraler Basis} \quad (44)$$

(Die **chirale Basis** wird auch **Weyl-Basis** genannt.)

Lorentz-invariante Feldgleichung:

$$[i\partial - m] \psi = 0 \quad (45)$$

mit $\partial = \partial_\mu \gamma^\mu$ und

$$\gamma^\mu = \gamma_{ch}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

in der chiralen Basis.

z.B.

$$\gamma_{ch}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$$

D.h. (45) sind gekoppelte Gleichungen für ξ, η .

$$\begin{aligned}
\gamma_{ch}^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= i \begin{pmatrix} \sigma^0\bar{\sigma}^1 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^0\sigma^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2\bar{\sigma}^3 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^2\sigma^3 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \sigma^0\sigma^1\sigma^2\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^0\sigma^1\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{2\times 2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{47}$$

Chirale Dirac-Spinoren:

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}$$

sind wegen $\gamma_5^2 = 1$ Projektoren ($P_L^2 = P_L$ und $P_R^2 = P_R$). Ein Dirac-Spinor ψ_L mit $P_R\psi_L = 0$ heißt **linkshändig** ($P_L\psi_R = 0 \Rightarrow \psi_R$ heißt **rechtshändig**).

Jeder Dirac-Spinor kann als $\psi = \psi_L + \psi_R$ geschrieben werden. Mit (47) sieht man in der chiralen Basis

$$\begin{aligned}
\underbrace{\psi_L}_{\text{linkshändiger Dirac-Spinor}} &= P_L\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi = \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{rechtshändiger Weyl-Spinor}} \\
\text{analog} \quad : \quad \psi_R &= \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{\dot{\beta}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

($\rightarrow$ siehe [Sterman])

$D^{(1,0)}$ und $D^{(0,1)}$: antisymmetrischer Tensor $F^{\mu\nu}$ (6 reelle Komponenten) $\rightarrow$ dualer Tensor $\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}$

Tensoren $F^{\pm\mu\nu}$ mit $\left\{ \begin{array}{l} F^{+\mu\nu} = \tilde{F}^{+\mu\nu} \\ F^{-\mu\nu} = -\tilde{F}^{-\mu\nu} \end{array} \right\}$ heißen $\left\{ \begin{array}{l} \text{selbst-dual} \\ \text{anti-selbst-dual} \end{array} \right\}$ und haben jeweils 3 Komponenten. Sie transformieren sich wie $\left\{ \begin{array}{l} D^{(0,1)} \\ D^{(1,0)} \end{array} \right\}$ ($\dim D^{(0,1)} = 3$). Zerlegt man $F^{\mu\nu} = F^{+\mu\nu} + F^{-\mu\nu}$, so findet man, dass sich $F^{\mu\nu}$ wie $D^{(0,1)} \oplus D^{(1,0)}$ transformiert.

2.2 Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ enthält $\mathcal{L}$ und die Translationsgruppe $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \{x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu : a^\mu \in \mathbb{R}^4\} \tag{48a}$$

$$\mathcal{P} = \{x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu : \Lambda^\mu{}_\nu \in \mathcal{L}, a^\mu \in \mathbb{R}^4\} \tag{48b}$$

Bemerkung: $\mathcal{P} \neq \mathcal{L} \otimes \mathcal{T}$, denn zwei Poincaré -Transformationen mit (Λ_1, a_1) und (Λ_2, a_2) multiplizieren sich zur Transformation mit $(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)$, und $\mathcal{P}$ ist damit ein *semidirektes Produkt* von $\mathcal{L}$ und $\mathcal{T}$ (siehe [1]).

Generatoren der Translation:

$$P_\rho = -i\partial_\rho \quad (49)$$

denn: $f(x') = f(x + a) = \exp(ia^\rho P_\rho)f(x)$ (Taylor-Reihe).

Lorentztransformationen kann man als

$$\Lambda = \exp(i\alpha_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) \quad (50a)$$

schreiben mit 6 Parametern $\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}$ und antisymmetrischen Generatoren $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$

$$J_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}M_{kl} \Rightarrow M_{kl} = \varepsilon_{klj}J_j \quad (50b)$$

$$K_j = M_{0j} \quad j, k, l \geq 1 \quad (50c)$$

Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe

$$\begin{aligned} [J_k, J_l] &= i\varepsilon_{klm}J_m \\ [K_j, K_n] &= -i\varepsilon_{jnk}J_k \\ [J_k, K_l] &= i\varepsilon_{klm}K_m \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (51a)$$

$$[J_j, P_0] = 0 \quad (51b)$$

$$[J_j, P_k] = i\varepsilon_{jkl}P_l \quad (51c)$$

$$[K_j, P_0] = -iP_j \quad (51d)$$

$$[K_j, P_k] = -iP_0\delta_{jk} \quad (51e)$$

Hierbei ist $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ und $j, k, l = 1, 2, 3$.

2.3 Casimir-Operatoren

1. $P_\mu P^\mu$

$$\text{z.B. } [K_j, P_\mu P^\mu] = [K_j, P_0^2] - [K_j, P_k \cdot P_k] \stackrel{(51)}{=} -2iP_jP_0 + 2i\delta_{jk}P_0P_k = 0$$

2. Mit dem **Pauli-Lubanski-(Axial-)Vektor**

$$W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} \quad (52)$$

ist $W_\mu W^\mu$ ein Casimir-Operator (ohne Beweis).

$$W^0 = \frac{1}{2} \varepsilon^{0jkl} (-P_j) M_{kl} \stackrel{(50)}{=} \frac{1}{2} \varepsilon^{0jkl} (-P_j) \varepsilon_{kl n} J_n = -P_j J_j = -\vec{P} \cdot \vec{J} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} W_j &= \frac{1}{2} \varepsilon^{j\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (-\varepsilon^{0jrs} P_0 M_{rs} + \varepsilon^{jn\rho\sigma} P_n M_{\rho\sigma}) \\ &\stackrel{(50)}{=} -P_0 J_j + \frac{1}{2} \varepsilon^{jn0\sigma} P_n (M_{0\sigma} - M_{\sigma 0}) = -P_0 J_j + \varepsilon^{jns} P_n K_s \\ \vec{W} &= -P_0 \vec{J} + \vec{P} \times \vec{K} \end{aligned} \quad (54)$$

Im Ruhesystem eines massiven Teilchens (KG) mit $p^\mu = (m, 0, 0, 0)^\top$ ist

$$\vec{W}^{RS} = -m \vec{J} \quad (55)$$

(d.h. $\vec{W}$ misst den Drehimpuls im Ruhesystem, also den Spin $\vec{S}$). Darstellungstheorie von $\mathcal{P}$ (E. Wigner): Zustände (=Teilchen) können mit den Eigenwerten von $P_\mu P^\mu$ und $W_\mu W^\mu$ gekennzeichnet werden. Dabei sind 4 Fälle möglich:

(a) $P_\rho P^\rho = m^2 > 0$ **massives Teilchen**

$$W_\rho W^\rho \stackrel{RS}{=} -m^2 \vec{S}^2$$

Eigenwerte:

$W_\rho W^\rho = -m^2 s(s+1)$ mit $s = 0, 1/2, 1, \dots$ ist Poincaré -invariant, also in jedem Bezugssystem richtig. Massive Teilchen mit Spin s haben $(2s+1)$ Polarisationsfreiheitsgrade.

(b) $P_\rho P^\rho = m^2 = 0$ **masseloses Teilchen**

und $W_\rho W^\rho = 0$. Aus (52) folgt $P_\rho W^\rho = 0$. Damit muss W^μ proportional zu P^μ sein: $W^\mu = \lambda P^\mu$. λ heißt Helizität und kann nur die Werte $\lambda = \pm s$ annehmen, wobei $s = 0, 1/2, 1, \dots$ der Spin der Darstellung ist.

$\Rightarrow$ Masselose Teilchen mit $s \neq 0$ haben nur zwei Polarisationsfreiheitsgrade.

(c) $P_\rho P^\rho = 0$ und Spin s ist reelle Zahl.

$W_\rho W^\rho < 0$, kommt in der Natur nicht vor.

(d) $P_\rho P^\rho < 0$ **Tachyonen**

... gibt's anscheinend nicht.

(Siehe [Ramond].)

3 Lagrangeformalismus der Felder

3.1 Bewegungsgleichungen

Mechanik:

- System mit Koordinaten (Freiheitsgrade) $\varphi_1, \dots, \varphi_N$
- Lagrange-Funktion $L(\varphi_i, \dot{\varphi}_i); \quad \varphi_i = \varphi(x_i)$

Man betrachtet nun eine Kette aus gekoppelten, harmonischen Oszillatoren:

$$L(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_i - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}}_{\text{Kopplung an den nächsten Nachbarn}}$$

mit Masse 1 und Federkonstanten $(x_{i+1} - x_i)^{-2}$. Führt man nun einen Grenzübergang zu einem kontinuierlichen Spektrum durch, so erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi_i(t) = \varphi(t, x_i) &\rightarrow \varphi(t, x) \\ \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{x_{i+1} - x_i} &\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned}$$

Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2$$

In $3 + 1$ Dimensionen:

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$$

Dieser Ausdruck ist Lorentz-invariant!

Wir addieren einen weiteren Lorentz-invarianten, bilinearen Term:

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 =: \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2}_{\text{kinetischer Term}} - \underbrace{\frac{m^2}{2} \varphi^2}_{\text{Massenterm}} \quad (56)$$

Dies ist die Lagrangedichte eines freien, reellen Klein-Gordon-Feldes (Skalarfeld).

Wirkung:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}$$

mit dem Lorentz-invarianten Volumenelement $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$.

Dimension: $[S] = [\hbar] = 0$, $[d^4x] = -4 \Rightarrow [\mathcal{L}] = 4$, $[\partial_\mu] = 1$, $[\varphi] = 1 \Rightarrow [m] = 1$.

Wie in der Mechanik folgen aus dem **Prinzip der extremalen Wirkung** $\frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0$ die **Euler-Lagrange-Gleichungen**.

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad (57)$$

Für das reelle Skalarfeld (56):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} &= \partial^\mu \varphi, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= -m^2 \varphi \\ \stackrel{(57)}{\Rightarrow} \partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (58)$$

erhält man also das die Klein-Gordon-Gleichung für reelles φ mit Masse m .
Zwei reelle Skalarfelder mit gleicher Masse m :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 - \frac{m^2}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \\ \stackrel{(57)}{\Rightarrow} (\square + m^2)\varphi_i &= 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (59)$$

(59) hat SO(2)-Symmetrie:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Komplexes Skalarfeld:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \\ \varphi^* &= \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\varphi^* + \varphi}{\sqrt{2}} \\ \varphi_2 &= i \frac{\varphi^* - \varphi}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right.$$

Damit erhält man die Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) &= \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 |\varphi|^2 \\ &= |\partial_\mu \varphi|^2 - m^2 |\varphi|^2 \end{aligned} \quad (60)$$

Im Gegensatz zu Gleichung (55) fehlt hier der Faktor $\frac{1}{2}$! Formal behandelt man in (57) φ und φ^* wie unabhängige Felder:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} &\stackrel{(60)}{=} \partial_\mu \partial^\mu \varphi, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} &= -m^2 \varphi \\ \stackrel{(57)}{\Rightarrow} (\square + m^2)\varphi &= 0 \end{aligned}$$

und erhält die Klein-Gordon-Gleichung für ein komplexes Skalarfeld.
(60) hat nun eine U(1) ($\simeq$ SO(2))-Symmetrie:

$$\varphi \rightarrow \varphi \exp(i\theta) \quad (61)$$

Symmetrien unter Transformationen der Raum-Zeit-Koordinaten x^μ heißen **äußere Symmetrien** (Beispiel: Poincaré-Transformationen). Symmetrietransformationen, bei denen die Felder φ , nicht jedoch x^μ transformiert werden, vermitteln **innere Symmetrien**.

(Beispiel: U(1)-Symmetrie in (61), Ladungskonjugation C)

Die Wirkung ändert sich nicht, wenn man zu $\mathcal{L}$ eine totale Ableitung addiert.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \partial_\mu Y^\mu[\varphi, \partial_\nu \varphi] \\ S' &= S + \int d^4x \partial_\mu Y^\mu[\varphi, \partial_\nu \varphi] \\ &= S + \oint_O d\sigma_\mu Y^\mu[\varphi, \partial_\nu \varphi] \quad \text{mit dem Oberflächenelement } d\sigma_\mu \\ &\quad \text{einer 3-dim Hyperfläche} \\ &= S\end{aligned}$$

da man nur Felder zulässt, bei denen φ und $\partial_\nu \varphi$ für $x^\mu \rightarrow \pm\infty$ hinreichend schnell verschwinden, so dass $\oint_O d\sigma_\mu Y^\mu[\varphi, \partial_\nu \varphi] = 0$.

$\mathcal{L}$ muss reell sein, damit Energie und Impuls reell sind.

Definiere:

$$\varphi_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi_2 := \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2 - \varphi_1 \overleftarrow{\partial}_\mu \varphi_2 = \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2 - (\partial_\mu \varphi_1) \varphi_2$$

Lagrangedichte des Weyl-Feldes ξ_a ohne Masse

$$\mathcal{L}_R^{kin} = \frac{i}{2} \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi = \frac{i}{2} [\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi - (\partial_\mu \xi^\dagger) \bar{\sigma}^\mu \xi] \quad (62)$$

Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung ergibt (ξ und $\xi^\dagger$ unabhängig behandeln!):

$$\begin{aligned}0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \xi^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\dagger} = \partial_\mu \left(-\frac{i}{2} \bar{\sigma}^\mu \xi \right) - \frac{i}{2} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi \\ 0 &= \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi \quad (\text{Weyl-Gleichung})\end{aligned}$$

Ebenso für $\eta^{\dot{a}}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_L^{kin} &= \frac{i}{2} \eta^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta \\ &\Rightarrow \sigma^\mu \partial_\mu \eta = 0\end{aligned} \quad (63)$$

Massen-Term:

$$\mathcal{L}_L^m = -\frac{1}{2} (m_L \eta^\top \varepsilon \eta - m_L^* \eta^\dagger \varepsilon \eta^*) \quad (64a)$$

$$\mathcal{L}_R^m = -\frac{1}{2} (m_R \xi^\dagger \varepsilon \xi^* - m_R^* \xi^\top \varepsilon \xi) \quad (64b)$$

Nun ist $\eta^\top \varepsilon \eta = \eta^{\dot{\alpha}} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} = \eta^1 \eta^2 - \eta^2 \eta^1$. Das wäre $= 0$ für eine klassische Theorie.
Spin- $\frac{1}{2} \Rightarrow$ Anti-kommutierende Feldoperatoren

$$\eta^1 \eta^2 = -\eta^2 \eta^1 \Rightarrow \eta^\top \varepsilon \eta = 2\eta^1 \eta^2 \neq 0$$

Wegen $(\eta^\top \varepsilon \eta)^\dagger = \eta^\dagger \varepsilon^\dagger \eta^* = -\eta^\dagger \varepsilon \eta^*$ ist (64) hermitesch. Die Terme in (64) heißen **Majorana-Massenterme**.

$$\mathcal{L}_D^m = -m \xi^\dagger \eta - m^* \eta^\dagger \xi \quad (65)$$

heißt **Dirac-Massen-Term**.

Mit $\psi = \begin{pmatrix} \exp(-i\theta)\xi \\ \exp(+i\theta)\eta \end{pmatrix}$, wobei $m = |m| \exp(2i\theta)$, wird (65) zu:

$$\mathcal{L}_D^m = -|m| \psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi = -|m| \bar{\psi} \psi \quad (66)$$

wobei $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ und $\gamma^0 = \gamma_{ch}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in der chiralen Basis der Dirac-Algebra. (62) und (63) werden zu:

$$\mathcal{L}_D^{kin} = \mathcal{L}_L^{kin} + \mathcal{L}_R^{kin} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} \psi \quad (67)$$

mit $\partial = \partial_\mu \gamma^\mu$ und

$$\gamma^\mu = \gamma_{ch}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (68)$$

D.h. aus (66) und (67) findet man die Lagrangedichte des freien Dirac-Feldes:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial} - m \right) \psi = -\frac{i}{2} \underbrace{\bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} \psi}_{=\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi} + \frac{i}{2} \bar{\psi} \partial \psi - m \bar{\psi} \psi$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{i}{2} \partial_\mu \gamma^\mu \psi - \frac{i}{2} \partial \psi + m \psi \\ \Rightarrow 0 &= (i\partial - m) \psi \quad (\text{Dirac-Gleichung}) \end{aligned} \quad (69)$$

Mit der Ableitung nach ψ findet man die adjungierte Gleichung:

$$0 = \bar{\psi} (i\overleftarrow{\partial} + m)$$

Meistens notiert man kürzer:

$$\mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D + \frac{i}{2} \underbrace{\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi}_{\text{totale Ableitung}} = \underbrace{\bar{\psi} (i\overleftarrow{\partial} - m) \psi}_{\text{nicht hermitesch}} \quad (70)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}'_D}{\partial \bar{\psi}} = (i\partial - m) \psi$$

Generell kann $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ zu $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger +$ totale Ableitung abgeschwächt werden.

Aus der QM II-Vorlesung ist die Dirac-Gleichung in der **Dirac-Basis** bekannt.

$$\begin{aligned} \gamma_D^\mu &= U \gamma_{ch}^\mu U^{-1} \\ \text{mit } U &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^\dagger \end{aligned}$$

Ein Feld, dass sich unter der Poincaré-Transformation $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ wie $V'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(x)$ transformiert, heißt **Vektorfeld**. Mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu$ des freien Vektorfelds ist die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} U_\mu U^\mu \quad (71)$$

Ist $m \neq 0$, so spricht man von einem **Proca-Feld**.

Beispiele:

- für $m = 0$: Photonen, Gluonen
- für $m \neq 0$: $W^\pm, Z$ -Bosonen, ρ Meson

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu U_\nu) (\partial^\mu U^\nu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu U_\nu) (\partial^\nu U^\mu) + \frac{m^2}{2} U_\mu U^\mu \quad (72)$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

Betrachte Beiträge $(\mu, \nu) = (\alpha, \beta)$ und $(\mu, \nu) = (\beta, \alpha)$ in (72) und schreibe $U_\mu U^\mu = U_\mu g^{\mu\nu} U_\nu$:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha U_\beta)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_\beta} = \\ &= \partial_\alpha (-\partial^\alpha U^\beta + \partial^\beta U^\alpha) - m^2 U^\beta \end{aligned} \quad (73)$$

$$\Rightarrow 0 = (\square g_{\beta\alpha} - \partial_\beta \partial_\alpha + m^2 g_{\beta\alpha}) U^\alpha \quad (\text{Proca-Gleichung}) \quad (74)$$

Betrachte: $m = 0$ und Kopplung an Stromdichte j^μ , Photonfeld A^μ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\underbrace{\partial_\alpha (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)}_{(73)} = \underbrace{j^\beta}_{=\frac{\partial(j_\mu A^\mu)}{\partial A^\beta}} \quad (75)$$

Man findet also die Maxwellgleichungen $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = j^\beta$.

3.2 Noether-Theorem

Betrachte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$; φ ist ein Feld (φ skalar oder $\varphi = \varphi_i$ oder $\varphi = A^\mu$ oder ein Multiplett von Feldern $\varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_n)$) und infinitesimale Transformationen bezüglich einer Lie-Gruppe

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (76)$$

mit

$$\delta x^\mu = X_k^\mu \delta \omega^k \quad (77)$$

Dabei sind die $\delta \omega^k$ die Parameter der Transformation (z.B. Eulerwinkel).

Beispiel: Drehung um $\delta \vec{\omega}$

$$\vec{x}' = \vec{x} + i \delta \omega^k J_k \vec{x}$$

damit hat man: $X_k^0 = 0$, $X_k^j = i(J_k \vec{x})^j$, $j = 1, 2, 3$.

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x) + \delta \varphi(x) \quad (78)$$

(Skalar: $\varphi'(x') = \varphi(x) \Rightarrow \delta \varphi(x) = 0$, Vektor: $\varphi'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu \varphi^\nu(x)$, usw.)

Da φ Darstellung der Liegruppe ist,

$$\delta \varphi(x) = \Phi_k(x) \delta \omega^k \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x') &= \varphi'(x + \delta x) \\ &= \varphi'(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &= \varphi(x) + \delta_0 \varphi(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \end{aligned} \quad (80)$$

mit $\delta_0 \varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x)$

$$\begin{aligned} \delta_0 \varphi(x) &\stackrel{(80)}{=} \varphi'(x') - \varphi(x) - \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &\stackrel{(78)(79)}{=} \Phi_k(x) \delta \omega^k - \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &\stackrel{(77)}{=} [\Phi_k(x) - (\partial_\nu \varphi) X_k^\nu] \delta \omega^k \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}'[\varphi'(x'), \partial_\mu \varphi'(x')] - \mathcal{L}[\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)] \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta_0 \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi)} \underbrace{\partial^\mu \delta_0 \varphi}_{= \delta_0 \partial^\mu \varphi} \end{aligned} \quad (82)$$

Ist φ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, so ist $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)}$ und (82) wird zu

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta_0\varphi \right) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}X_k^\mu(x)\delta\omega^k + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} [\Phi_k(x) - (\partial_\nu\varphi)X_k^\nu(x)] \delta\omega^k \right]
\end{aligned} \tag{83}$$

Wirkung:

$$\begin{aligned}
S' &= \int d^4x \mathcal{L}'(\varphi', \partial_\mu\varphi') \\
\delta S &= S' - S = \int \delta(d^4x) \mathcal{L} + \int d^4x \delta\mathcal{L} \\
d^4x' &= \left| \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| d^4x = \left| \det \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} (x^\mu + X_k^\mu \delta\omega^k) \right) \right| d^4x \\
&= \left| \det (\delta_\nu^\mu + \partial_\nu (X_k^\mu \delta\omega^k)) \right| d^4x \\
&= (1 + \partial_\mu (X_k^\mu \delta\omega^k)) d^4x, \\
&\quad \text{denn } \det(\mathbf{1} + \varepsilon) = 1 + \text{tr } \varepsilon + O(\varepsilon^2), \\
\delta(d^4x) &= \partial_\mu X_k^\mu \delta\omega^k d^4x
\end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}
\delta S &\stackrel{(80)(81)}{=} \int d^4x (\mathcal{L} \partial_\mu (X_k^\mu \delta\omega^k) + \delta\mathcal{L}) \\
&\stackrel{(83)}{=} \int d^4x \partial_\mu \left(\left[\mathcal{L} X_k^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} [\Phi_k - (\partial_\nu\varphi)X_k^\nu] \right] \delta\omega^k \right)
\end{aligned} \tag{85}$$

Ist $\delta\omega^k$ unabhängig von x , so spricht man von **globalen Transformationen**. Das Integrationsvolumen in $S = \int_V d^4x \mathcal{L}$ ist bisher unspezifiziert. Wir wählen V beliebig. Ist nun S invariant, also $\frac{\delta S}{\delta\omega^k} = 0$, so folgt aus (86), dass

$$j_k^\mu = -\mathcal{L} X_k^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} (X_k^\nu \partial_\nu\varphi - \Phi_k(x)) \tag{87}$$

ein erhaltener Strom ist (**Noether-Theorem**):

$$\partial_\mu j_k^\mu = 0 \tag{88a}$$

j_k^μ heißt Noether-Strom. Mit (88a) ist die Ladung

$$Q_i(x) = \int d^3\vec{x} j_i^0(t, \vec{x}) \tag{88b}$$

konstant:

$$\dot{Q}_i(x) = \int d^3\vec{x} \partial_0 j_i^0 \stackrel{(88b)}{=} - \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \oint_O d\vec{S} \cdot \vec{j} = 0$$

für $\vec{j} = 0$ im Unendlichen.

Der erhaltene Noether-Strom ist nicht eindeutig, z.B. kann man einen Strom $j_k'^\mu$ addieren, dessen Divergenz verschwindet:

$$\partial_\mu j_k'^\mu = 0$$

(z.B. $j_k'^\mu = \partial^\nu T_{\mu\nu}$ mit $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$)

Verallgemeinerung von (87) auf den Fall mehrerer Felder φ^a in $\mathcal{L}$:

$$j_k^\mu = -\mathcal{L}X_k^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^a)}(X_k^\nu\partial_\nu\varphi^a - \Phi_k^a(x))$$

Beispiel: Reelles KG-Feld

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - V(\varphi) \quad (89)$$

dabei ist $V(\varphi)$ eine beliebige Funktion (z.B. $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$)

$\Rightarrow$ BGL ist nicht mehr linear in $\varphi \Rightarrow$ Selbstwechselwirkung

$\mathcal{L}$ ist invariant unter Transformationen

$$x^\nu \rightarrow x^\nu + \underbrace{\varepsilon^\nu}_{\delta\omega^k} \quad (90)$$

$$\text{also } X_\nu^\mu(x) \stackrel{(77)}{=} \delta_\nu^\mu \quad (91)$$

φ ist ein Skalarfeld $\delta\varphi(x) = 0 \stackrel{(79)}{\Rightarrow} \Phi_\nu(x) = 0$.

$$(89) \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial^\mu\varphi \quad (92a)$$

Den erhaltenen Strom bezeichnet man im Fall der Translationen (90) mit T_ν^μ , es ist der **Energie-Impuls-Tensor**.

$$T_\nu^\mu \stackrel{(88)}{=} -\mathcal{L}\delta_\nu^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi \quad (92b)$$

$$\stackrel{(82)}{=} -\mathcal{L} \underbrace{\delta_\nu^\mu}_{(91)} + \underbrace{\partial^\mu\varphi\partial_\nu\varphi}_{(92)}$$

$$T_\nu^\mu \stackrel{(89)}{=} \partial^\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \delta_\nu^\mu \left(\frac{1}{2}(\partial_\lambda\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - V(\varphi) \right) \quad (93)$$

Damit hat man die erhaltene Ladung, den Viererimpuls:

$$P_\nu = \int d^3\vec{x} T_\nu^0 \quad (94)$$

Fourierdarstellung des Feldes:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^* e^{ipx})$$

Für das *freie* KG-Feld mit $V(\varphi) = 0$ findet man leicht:

$$P_\nu = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}} p_\nu$$

Dies ist

- unabhängig von x
- eine Superposition der einzelnen Impulse p_ν der Fourierkomponenten.

Aus (92b) findet man

$$T_0^0 = -\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} \partial_0 \varphi \quad (95)$$

Ein Vergleich mit der klassischen Mechanik

$$H = \sum_\lambda p_i \dot{q}_i - L = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

$\Rightarrow T_0^0$ ist **Hamilton-Dichte!**
kanonische(r) Feldimpuls(dichte)

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \stackrel{(92)}{=} \dot{\varphi}(x), \text{ wobei } \dot{\varphi} = \partial_0 \varphi \quad (96)$$

Es ist $T_0^0 \stackrel{(95)}{=} \pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}(x)$.

Der Hamilton-Operator (= Energie) ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} H &= P_0 \stackrel{(94)}{=} \int d^3\vec{x} T_0^0 = \int d^3\vec{x} (\pi(x) \dot{\varphi} - \mathcal{L}(x)) \\ &\stackrel{(89)(96)}{=} \int d^3\vec{x} \left(\frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 + m^2 \varphi^2) + V(\varphi) \right) \end{aligned} \quad (97)$$

und der Impuls ist:

$$\begin{aligned} P_j &\stackrel{(94)}{=} \int d^3\vec{x} T^{0j} \stackrel{(93)}{=} \int d^3\vec{x} \dot{\varphi} \partial_j \varphi \\ P^j &= - \int d^3\vec{x} \dot{\varphi} \partial_j \varphi \\ \vec{P} &= - \int d^3\vec{x} \dot{\varphi} \vec{\nabla} \varphi = - \int d^3\vec{x} \underbrace{\pi(x)}_{\text{Impulsdichte}} \vec{\nabla} \varphi \end{aligned} \quad (98)$$

Nächste Anwendung des Noether-Theorems:

Infinitesimale Drehungen

$$\begin{aligned}\delta \vec{x} &= i\delta\omega^k J_k \vec{x}, & \delta x^0 &= 0 \\ X_k^j &= i(J_k \vec{x})^j, & X_k^0 &= 0, \quad j, k = 1, 2, 3 \\ \delta\varphi &= 0 = \Phi_k\end{aligned}$$

$$(88) \Rightarrow j_k^0 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}(\partial_j \varphi) X_k^j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}(\vec{\nabla} \varphi)^\top i J_k \vec{x} \stackrel{(92)}{=} -\dot{\varphi}(\vec{\nabla} \varphi)^\top i J_k \vec{x} \quad (99)$$

Wir definieren mit (98) die Impulsdichte $\vec{p}(x) = -\dot{\varphi} \vec{\nabla} \varphi$, so dass $\vec{P} = \int d^3 \vec{x} \vec{p}(x)$, so wird (99) zu

$$j_k^0 = \vec{p}(x) i J_k \vec{x} = p_m \underbrace{(i J_k)_{mn}}_{=\varepsilon_{kmn}} x_n = \varepsilon_{kmn} p_m x_n = (\vec{p} \times \vec{x})_k \quad (13)$$

D.h. $-j_k^0$ ist eine Drehimpulsdichte. Erhaltene Ladung (88b) ist der Drehimpuls:

$$\begin{aligned}L_k &= - \int d^3 \vec{x} j_k^0(x) \\ \vec{L} &= \int d^3 \vec{x} (\vec{x} \times \vec{p})\end{aligned} \quad (100)$$

Anwendung des Noether-Theorems auf eine innere Symmetrie:
Komplexes KG-Feld, siehe (60), nun mit Selbstwechselwirkung

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m|\varphi|^2 - V(|\varphi|) \quad (101)$$

Diese weist eine U(1)-Symmetrie auf:

$$\begin{aligned}\varphi &\rightarrow \varphi \exp(i\delta\vartheta) = \varphi + i\varphi\delta\vartheta \\ \delta x^\mu &= 0 \Rightarrow X_k^\mu = 0 \\ \left. \begin{aligned} \delta\varphi &= i\delta\vartheta\varphi \\ \delta\varphi^* &= -i\delta\vartheta\varphi^* \end{aligned} \right\} \stackrel{(79)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} = \Phi\delta\vartheta \\ \text{mit } \Phi &= \begin{pmatrix} i\varphi \\ -i\varphi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (102)$$

Der Noether-Strom (88) lautet:

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \Phi^1 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} \Phi^2 \stackrel{(101)(102)}{=} -i(\partial^\mu \varphi^*)\varphi + i(\partial^\mu \varphi)\varphi^* \quad (103)$$

mit der erhaltenen Ladung

$$Q = \int d^3 \vec{x} j^0 = i \int d^3 \vec{x} (\varphi^* \dot{\varphi} - \varphi \dot{\varphi}^*)$$

z.B. elektrische Ladung.

U(1)-Symmetrie der Dirac-Theorie

$$\psi \rightarrow \exp(i\theta)\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \exp(-i\theta)\bar{\psi}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + e\bar{\psi}\mathcal{A}\psi$$

(mit der Kopplung an das elektromagnetische Feld $\mathcal{A}$)

Φ ist wie in (102):

$$\Phi = \begin{pmatrix} i\psi_a \\ -i\bar{\psi}_a \end{pmatrix} \quad \text{Spinor-Index } a = 1, 2, 3, 4$$

(103) wird zu:

$$j^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_a)}i\psi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi}_a)}i\bar{\psi}_a = -i\bar{\psi}\gamma^\mu i\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (104a)$$

Das ist die U(1)-Stromdichte des Dirac-Feldes.

Ist z.B. ψ das Elektronenfeld, so ist $ej^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ die elektromagnetische Stromdichte.

$$Q = e \int d^3\vec{x} j^0 = e \int d^3\vec{x} \bar{\psi}\gamma^0\psi = e \int d^3\vec{x} \psi^\dagger\psi \quad (104b)$$

ist die erhaltene elektrische Gesamtladung. $e\psi^\dagger\psi$ ist also die Ladungsdichte.

4 Kanonische Feldquantisierung

Klassische Feldtheorie

Feld $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$

$\longrightarrow$ (Feld-)Quantisierung $\longrightarrow$

Quantenfeldtheorie

Feldoperator $\varphi(x)$ auf
einem Hilbertraum

„zweite Quantisierung“

(Manchmal schreibt man auch $\hat{\varphi}$ für den Feldoperator.)

4.1 Reelles Klein-Gordon-Feld

Analog zu harmonischen Oszillatoren der Quantenmechanik:

$$[\phi(x), \pi(x')]|_{x^0=x'^0} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')\mathbf{1} \quad (105)$$

$$[\phi(x), \phi(x')]|_{x^0=x'^0} = [\pi(x), \pi(x')]|_{x^0=x'^0} = 0 \quad (106)$$

$\phi(x)$: Operator zur Amplitude eines harmonischen Oszillators, der am Raum-Punkt $\vec{x}$ angebracht ist.

Operatoren sind zeitabhängig (x_0 -abhängig)

$\Rightarrow$ Heisenbergbild bzw. (für wechselwirkende Theorien) Wechselwirkungsbild.

In der Quantenmechanik wurde der Fall betrachtet, dass die Amplitude des Oszillators der Ort eines Punktteilchens war, d.h. ϕ, π entsprachen Orts- und Impulsoperator. Diese Interpretation ist in der relativistischen Quantenmechanik nicht möglich, da es keinen Ortsoperator gibt (wg. der Nichterhaltung der Teilchenzahl).

Fouriertransformation:

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \int d^3\vec{x} \exp(i\vec{k} \vec{x}) \phi(x) \quad (107)$$

$$\tilde{\pi}(\vec{k}, t) = \int d^3\vec{x} \exp(i\vec{k} \vec{x}) \pi(x) \quad (108)$$

$\tilde{\phi}$ und $\tilde{\pi}$ sind Felder im 3-er Impulsraum.

Inverse:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{k} \vec{x}) \tilde{\phi}(\vec{k}, t) \quad (109a)$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{k} \vec{x}) \tilde{\pi}(\vec{k}, t) \quad (109b)$$

Denn:

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{k} \vec{x}) \tilde{\phi}(\vec{k}, t) \stackrel{(107)}{=} \int d^3\vec{x}' \underbrace{\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{k} \vec{x}) \exp(i\vec{k} \vec{x}')}_{=\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')} \phi(\vec{x}', x^0) = \phi(x)$$

Zeitabhängigkeit von $\tilde{\phi}(\vec{k}, t)$ für das freie KG-Feld: KG-Gleichung:

$$\begin{aligned}
 0 &= (\square + m^2)\phi(x) = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right] \phi(x) \\
 &\stackrel{(109)}{=} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right] \exp(-i\vec{k}\vec{x}) \tilde{\phi}(\vec{k}, t) \\
 \Rightarrow &\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{k}^2 + m^2 \right] \tilde{\phi}(\vec{k}, t) = 0, \text{ da } \vec{\nabla} \exp(-i\vec{k}\vec{x}) = -i\vec{k} \exp(-i\vec{k}\vec{x}) \quad (110a)
 \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \tilde{\phi}(\vec{k}, 0) \cos(E_k t) + \frac{\dot{\tilde{\phi}}(\vec{k}, 0)}{E_k} \sin(E_k t) \quad (110b)$$

$$\text{mit } E_k = \sqrt{k^2 + m^2}$$

Definiere:

$$a(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[E_k \tilde{\phi}(\vec{k}, t) + i\tilde{\pi}(\vec{k}, t) \right] \quad (111a)$$

$$a^\dagger(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[E_k \tilde{\phi}^\dagger(\vec{k}, t) - i\tilde{\pi}^\dagger(\vec{k}, t) \right] \quad (111b)$$

$a^\dagger$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{komplexe} \\ \text{hermitesche} \end{array} \right\}$ Konjugation für $\left\{ \begin{array}{l} \text{klassische Felder} \\ \text{Feldoperatoren} \end{array} \right\}$.

$$\phi \text{ reell} \quad \stackrel{(107)}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}^\dagger(\vec{k}, t) = \int d^3\vec{x} \exp(-i\vec{k}\vec{x}) \phi(x) = \tilde{\phi}(-\vec{k}, t) \\ \tilde{\pi}^\dagger(\vec{k}, t) = \tilde{\pi}(-\vec{k}, t) \end{array} \right\} \quad (112)$$

$$\Rightarrow a^\dagger(-\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[E_k \tilde{\phi}(\vec{k}, t) - i\tilde{\pi}(\vec{k}, t) \right] \quad (113)$$

Mit (113) finden wir aus (111):

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (a(\vec{k}, t) + a^\dagger(-\vec{k}, t)) \quad (114a)$$

$$\tilde{\pi}(\vec{k}, t) = i\sqrt{\frac{E_k}{2}} (a^\dagger(-\vec{k}, t) - a(\vec{k}, t)) \quad (114b)$$

und mit (109):

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(-i\vec{k}\vec{x})}{\sqrt{2E_k}} a(\vec{k}, t) + \underbrace{\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(-i\vec{k}\vec{x})}{\sqrt{2E_k}} a^\dagger(-\vec{k}, t)}_{\text{substitution } \vec{k} \rightarrow -\vec{k}} \\
 &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (\exp(-i\vec{k}\vec{x}) a(\vec{k}, t) + \exp(i\vec{k}\vec{x}) a^\dagger(\vec{k}, t)) \quad (115)
 \end{aligned}$$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi}(x))} = \dot{\phi}(x) \Rightarrow \tilde{\pi}(\vec{k}, t) = \dot{\tilde{\phi}}(\vec{k}, t)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(110) &\Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{k}^2 + m^2 \right] \tilde{\pi}(\vec{k}, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(111) &\Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{k}^2 + m^2 \right] a(\vec{k}, t) = 0\end{aligned}$$

(sieht man auch aus $0 = (\square + m^2)\phi(x)$ mit $\phi(x)$ in (115))

Lösung:

$$\begin{aligned}a(\vec{k}, t) &= a_{\vec{k}} \exp(-iE_k t), & a_{\vec{k}} &= a(\vec{k}, 0) \\ a^\dagger(\vec{k}, t) &= a_{\vec{k}}^\dagger \exp(+iE_k t)\end{aligned}$$

$$(115) \Rightarrow \phi(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (a_{\vec{k}} \exp(-ikx) + a_{\vec{k}}^\dagger \exp(ikx)) \Big|_{k^0=E_k} \quad (116)$$

$$\text{und} \quad \pi(x) = -i \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_k}{2}} (a_{\vec{k}} \exp(-ikx) - a_{\vec{k}}^\dagger \exp(ikx)) \Big|_{k^0=E_k} \quad (117)$$

Bemerkung: Wie ist ein Integral über einen Operator definiert?

Beispiel: In (117) ist $\pi(x)$ der Operator, dessen Matrixelemente $\langle f | \pi(x) | i \rangle$ durch

$$-i \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_k}{2}} (\langle f | a_{\vec{k}} | i \rangle \exp(-ikx) - \langle f | a_{\vec{k}}^\dagger | i \rangle \exp(ikx)) \Big|_{k^0=E_k}$$

gegeben ist. ($\langle f | a_{\vec{k}} | i \rangle$ ist eine „normale“, komplexe Funktion von $\vec{k}$). Mit (111) und (109) können wir $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger]$ aus (105) und (106) berechnen.

$$\begin{aligned}[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] &= \frac{1}{2E_k} [E_k \tilde{\phi}(\vec{k}, 0) + i\tilde{\pi}(\vec{k}, 0), E_{k'} \tilde{\phi}^+(\vec{k}', 0) - i\tilde{\pi}^+(\vec{k}', 0)] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{E_k E_{k'}}} \int d^3 \vec{x} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \int d^3 \vec{y} \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{y}) iE_{k'} \underbrace{[\pi(\vec{x}, 0), \phi(\vec{y}, 0)]}_{-i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{E_k E_{k'}}} \int d^3 \vec{x} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \int d^3 \vec{y} \exp(i\vec{k}' \cdot \vec{y}) iE_k \underbrace{[\phi(\vec{y}, 0), \pi(\vec{x}, 0)]}_{i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_{k'}}{E_k}} \underbrace{\int d^3 \vec{x} \exp(i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x})}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_k}{E_{k'}}} \underbrace{\int d^3 \vec{x} \exp(i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x})}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')} \quad (118) \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (119)\end{aligned}$$

Ebenso findet man (nun wegen eines relativen „-“-Zeichens zwischen den Termen):

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \quad (120)$$

Hamilton-Operator

$$H = \int d^3 \vec{x}' T_0^0 \stackrel{(97)}{=} \int d^3 \vec{x}' \left[\frac{1}{2} (\pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2) + V(\phi) \right]$$

H ist zeitunabhängig wegen des Noether-Theorems.

$\Rightarrow$ wähle im folgenden $t = t'$ in den Feldern ϕ und π rechts.

$$[\phi(x), H] = \int d^3\vec{x}' \frac{1}{2} \left(\underbrace{[\phi(x), \pi^2(x')]_{t=t'}}_{\pi(x')[\phi(x), \pi(x')] + [\phi(x), \pi(x')]\pi(x')} + [\phi(x), (\vec{\nabla}\phi(x'))^2]_{t=t'} \right) \quad (121)$$

$$\begin{aligned} [\phi(x), (\vec{\nabla}\phi(x'))^2] &= [\phi(x), \partial_j\phi(x')\partial_j\phi(x')]_{t=t'} \\ &= \underbrace{[\phi(x), \partial_j\phi(x')]}_{\frac{\partial}{\partial x'^j}[\phi(x), \phi(x')] = 0} \partial_j\phi(x') + \partial_j\phi(x)[\phi(x'), \partial_j\phi(x')] \\ &\Rightarrow [\phi(x), (\vec{\nabla}\phi)^2] = 0 \end{aligned}$$

$$(121) \Rightarrow [\phi(x), H] = \int d^3\vec{x}' \pi(t, \vec{x}') i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = i\pi(t, \vec{x}) = i\dot{\phi}(x) \quad (122)$$

Dies ist die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für ϕ !

$$[\pi(x), H] = \int d^3\vec{x}' \frac{1}{2} \left[\underbrace{[\pi(x), \phi(x')(-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x')]}_{\text{part. Int.: } \int (\nabla\phi)^2 = - \int \phi \nabla^2 \phi} + [\pi(x), V(\phi(x'))] \right] \quad (123)$$

Für $V(\phi) = \sum_n c_n \phi^n$:

Wegen

$$[\pi, \phi^n] = \phi[\pi, \phi^{n-1}] + \underbrace{[\pi, \phi]}_{-i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')} \phi^{n-1}$$

findet man durch vollständige Induktion:

$$\begin{aligned} [\pi(x), \phi^n(x')] &= -n\phi^{n-1}(x') i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \text{ also} \\ [\pi(x), V(\phi(x'))] &= \sum_n c_n [\pi(x), \phi^n(x')] = -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \frac{\partial V}{\partial \phi}(x') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (123) \Rightarrow [\pi(x), H] &= \int d^3\vec{x}' \left(-i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')(-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x') - i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \frac{\partial V}{\partial \phi}(x') \right) \\ &= -i(-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x) - i\frac{\partial V}{\partial \phi}(x) \end{aligned} \quad (124)$$

Aus (122) und (124) findet man:

$$\ddot{\phi}(x) \stackrel{(122)}{=} -i[\dot{\phi}, H] = -i[\pi, H] \stackrel{(124)}{=} (\nabla^2 - m^2)\phi(x) - \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (125)$$

$$\Rightarrow (\square + m^2)\phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (126)$$

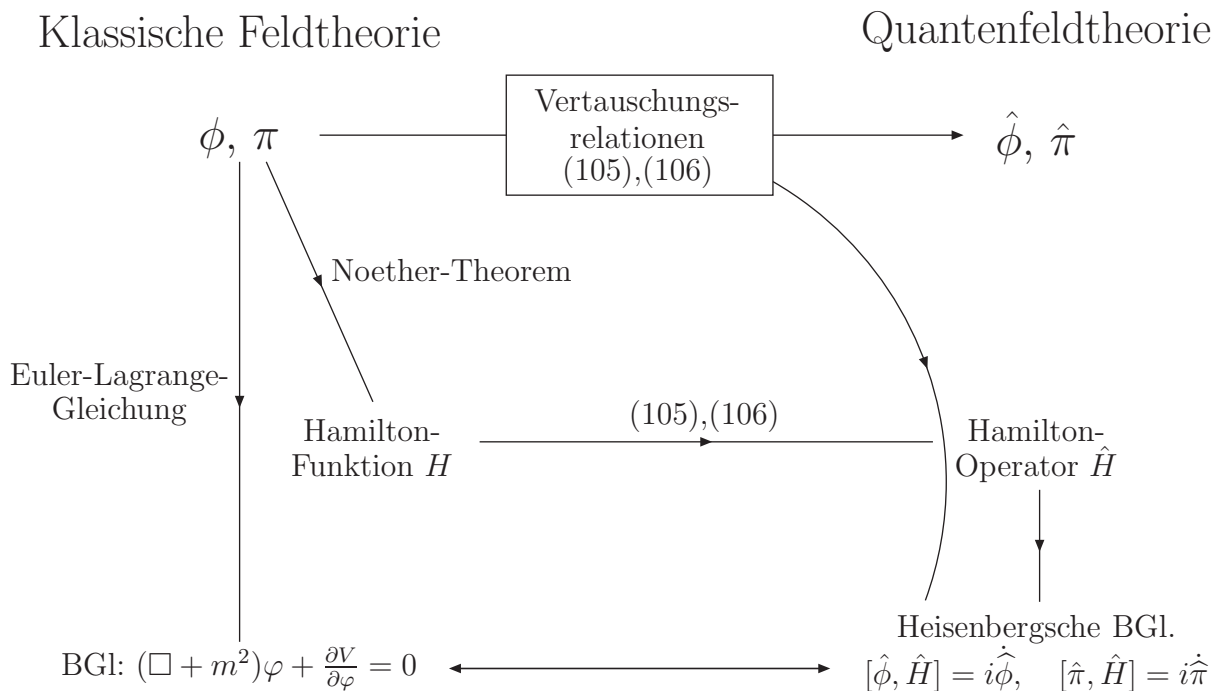
$$\Leftrightarrow \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

für $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi)$ (89), der Lagrangedichte des wechselwirkenden, reellen KG-Feldes.

Außerdem: (124) $\Rightarrow [\pi(x), H] = i\ddot{\phi}(x) = i\dot{\pi}(x)$ (Heisenbergsche Bewegungsgleichung für $\pi(x)$)
 D.h die Zeitentwicklung der Quantentheorie die durch die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für die **Feldoperatoren** ϕ und π gegeben ist, reproduziert in (126) das Ergebnis der Euler-Lagrange-Gleichung.

$\Rightarrow$ Konsistenztest, dass kanonische Quantisierung Sinn macht.

Logik:



Der Hamilton-Operator für eine freie Theorie ($V(\phi) = 0$), ausgedrückt durch die Auf- und Absteigeoperatoren, lautet:

$$H = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} E_p \left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2} [a_p, a_p^\dagger] \right) \quad (127)$$

Der Übergang von der klassischen zur quantisierten Theorie ist nicht eindeutig, weil a_p, a_p^* nur in der klassischen Theorie vertauschen.

$\Rightarrow$ Der Koeffizient von $[a_p, a_p^\dagger]$ ist unbestimmt.

Der Beitrag von $[a_p, a_p^\dagger]$ entspricht der Grundzustandsenergie der ∞ -vielen harmonischen Oszillatoren und muss substrahiert werden, um endliche Energien zu haben. Diese Unbestimmtheit hat keine Auswirkungen, da sie nur den Energienullpunkt verschiebt. Es gilt:

$$[H, a_p^\dagger] = E_p a_p^\dagger \quad (128a)$$

$$[H, a_p] = -E_p a_p \quad (128b)$$

a_p und $a_p^\dagger$ sind Vernichter und Erzeuger, aber von was? Der Zustandsraum ist noch nicht bekannt. Wir erreichen den gesamten Hilbertraum durch mehrmaliges anwenden von Erzeugern und Vernichtern.

Grundzustand $|0\rangle$ mit $\langle 0|0\rangle = 1$ ist definiert durch $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$ für alle $\vec{p}$.

Jetzt stellen wir die Verbindung zur Physik her und interpretieren $|0\rangle$ als Vakuum.

Mit

$$H = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p$$

findet man die Vakuum-Energie: $\langle 0|H|0\rangle = 0$

D.h. die korrekte Vorschrift in der Behandlung von $a_p, a_p^\dagger$ in den Noether-Ladungen ist die sogenannte **Normalordnung** bei der die Vernichter rechts von den Erzeugern stehen. Manchmal schreibt man

$$: a_p^\dagger a_p : \equiv : a_p a_p^\dagger : \equiv a_p^\dagger a_p$$

Was erzeugt nun $a_p^\dagger$?

Definition:

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle \quad (129)$$

$$a_q |\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p} ((2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + a_p^\dagger a_q) |0\rangle = \sqrt{2E_p} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) |0\rangle \quad (130)$$

$$\begin{aligned} (129) \Rightarrow \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle &= 2\sqrt{E_p E_q} \langle 0 | a_q a_p^\dagger | 0 \rangle = 2\sqrt{E_p E_q} \langle 0 | (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) + a_p^\dagger a_q | 0 \rangle \\ &= 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) \end{aligned} \quad (131)$$

$\Rightarrow$ Die Normierung ist so, dass $|\vec{p}\rangle$ Dimension -1 hat.

$$\begin{aligned} H |\vec{p}\rangle &= \sqrt{2E_p} H a_p^\dagger |0\rangle \\ &= \sqrt{2E_p} (\underbrace{a_p^\dagger H}_{=0} |0\rangle + [H, a_p^\dagger] |0\rangle) \stackrel{(128)}{=} \sqrt{2E_p} E_p a_p^\dagger |0\rangle \\ &= E_p |\vec{p}\rangle \end{aligned} \quad (132)$$

$\Rightarrow |\vec{p}\rangle$ ist Eigenzustand von H mit Energie $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \Rightarrow |\vec{p}\rangle$ ist Einteilchen-Zustand, aus (129) interpretieren wir $a_p^\dagger$ als den Erzeuger eines Teilchens mit Impuls $\vec{p}$.

Zwei-Teilchen-Zustand:

$$|\vec{p}, \vec{q}\rangle = \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} a_p^\dagger a_q^\dagger |0\rangle = |\vec{q}, \vec{p}\rangle \quad (133)$$

$\Rightarrow$ KG-Feld beschreibt **Bosonen**.

N-Teilchenzustand:

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle = \sqrt{2E_{p_1}} \dots \sqrt{2E_{p_N}} a_{p_1}^\dagger \dots a_{p_N}^\dagger |0\rangle \quad (134)$$

Poincaré-Transformationen $(\Lambda, a) \in \mathcal{P} : x \rightarrow x' = \Lambda x + a$

Zwei Zustände $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$:

$$|\psi'_i\rangle = \underbrace{U(\Lambda, a)}_{\in \text{Darstellung von } \mathcal{P}} |\psi_i\rangle \quad (135)$$

Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Amplituden erfordert:

$$\begin{aligned} |\langle \psi'_1 | \psi'_2 \rangle| &\stackrel{!}{=} |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle| = |\langle \psi_1 | U^+(\Lambda, a) U(\Lambda, a) | \psi_2 \rangle| \\ \Rightarrow U^+(\Lambda, a) U(\Lambda, a) &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

$U(\Lambda, a)$ ist unitäre Darstellung von $P : U(\Lambda', a') U(\Lambda, a) = U(\Lambda' \Lambda, \Lambda' a + a')$

Vakuum-Zustand soll ein Singulett-Zustand sein, also in allen Bezugssystemen gleich:

$$U(\Lambda, a) |0\rangle = |0\rangle$$

Wie transformieren sich Feldoperatoren?

Klassisches Skalarfeld: $\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x)$

Matrixelemente der Feldoperatoren sollen sich wie ein klassisches Feld transformieren:

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \phi(x) | \psi_2 \rangle &\stackrel{!}{=} \langle \psi'_1 | \phi'(x') | \psi'_2 \rangle = \langle \psi_1 | U^+(\Lambda, a) \phi'(x') U(\Lambda, a) | \psi_2 \rangle \\ \Rightarrow U^+(\Lambda, a) \phi'(x') U(\Lambda, a) &= \phi(x) \end{aligned} \quad (136)$$

Aus (136) können wir $U(\Lambda, a)$ bestimmen. Zunächst betrachtet man reine Translationen: Suche $U(0, a)$.

$$\begin{aligned} \text{Wähle } x &= 0 \Rightarrow x' = a \\ \Rightarrow \phi'(a) &= U(0, a) \phi(0) U^+(0, a) \end{aligned} \quad (137a)$$

Reine Zeittranslation: $a = (t, 0, 0, 0)$

In (122) haben wir mit der Heisenbergschen Bewegungsgleichung gefunden, dass $i\dot{\phi} = [\phi(x), H]$

Lösung:

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \exp(iHt) \phi(x, 0) \exp(-iHt) \\ \text{denn, } -i\dot{\phi} &= -H\phi(x) + \phi(x)H \end{aligned} \quad (137b)$$

Vergleich mit (137)

$$U(0, a) = \exp(iHa_0) \text{ für } a = (a_0, 0, 0, 0) \quad (138)$$

Analog zur Herleitung von (122) findet man:

$$[\phi(x), \vec{P}] = -i\vec{\nabla}\phi \quad (139)$$

also

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \exp(-i\vec{P}\vec{x}) \phi(0, t) \exp(i\vec{P}\vec{x}) \\ \stackrel{(137)}{\Rightarrow} U(0, a) &= \exp(-i\vec{P}\vec{a}) \text{ für } a = (0, \vec{a}) \end{aligned} \quad (140)$$

(138) und (140) kombiniert man zu:

$$U(0, a) = \exp(iPa) \quad (141)$$

Für Lorentz-Transformationen $U(\Lambda, 0)$ können wir genauso verfahren. Die Noether-Ladungen (siehe (99) und (100) für Drehungen) erfüllen Vertauschungsrelationen mit ϕ analog zu (122) und (139). Speziell für Drehungen $\Lambda = \Lambda(0, \vec{\varphi})$:

$$U(\Lambda, 0) = \exp(-i\vec{\varphi} \vec{L}) \quad (142)$$

mit $L_k \stackrel{(99)(100)}{=} - \int d^3 \vec{x} j_k^0(\vec{x}) = - \int d^3 \vec{x} \dot{\phi} (\vec{\nabla} \phi)^\top i J_k \vec{x}$

Schematisch:

Klassische Feldtheorie	Quantenfeldtheorie
Symmetrie unter $x \rightarrow x', \phi \rightarrow \phi'$ mit Parameter a_k	$\hat{\phi}' = \exp(ia_k \hat{Q}_k) \hat{\phi} \exp(-ia_k \hat{Q}_k)$
$\Downarrow$	$\Uparrow$
Noether-Ladungen Q_k erhalten	$\hat{Q}_k$ Operatoren
	$\Rightarrow$

$$(122), (139) \Leftrightarrow [\phi(x), P_\mu] = i\partial_\mu \phi(x) \quad (143)$$

$$\Rightarrow [\pi(x), P_\mu] = [\dot{\phi}, P_\mu] = i\partial_\mu \dot{\phi}(x) = i\partial_\mu \pi(x)$$

$$(107), (108), (111) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a(\vec{k}, t) = a_{\vec{k}} \exp(-iE_k t) = \exp(iHt) a_{\vec{k}} \exp(-iHt) \\ \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x}) a_{\vec{k}} \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) = a_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \exp(iPx) a_{\vec{k}} \exp(-iPx) = a_{\vec{k}} \exp(-ikx) \Big|_{k_0=E_k} \quad (144)$$

Ein Ein-Teilchen-Zustand transformiert sich also unter unitären Transformationen wie

$$|\vec{p}\rangle \rightarrow |\vec{p}'\rangle \stackrel{E_{p'}=E_p}{=} \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle \stackrel{(144)}{=} \sqrt{2E_p} a_p^\dagger \exp(ipa) |0\rangle \Big|_{p_0=E_p} = \exp(ipa) |\vec{p}\rangle \quad (145)$$

Alternativ: $P^\mu |\vec{p}\rangle = p^\mu |\vec{p}\rangle$ mit $p^0 = E_p \Rightarrow \exp(iPa) |\vec{p}\rangle = \exp(ipa) |\vec{p}\rangle$

Unter Lorentztransformationen

$$x \rightarrow x' = \Lambda x$$

$$|\vec{p}\rangle \rightarrow |\vec{p}'\rangle = U(\Lambda, 0) |\vec{p}\rangle = \left| \overrightarrow{(\Lambda p)} \right\rangle$$

$$\overrightarrow{(\Lambda p)} : \text{räumliche Komponente von } \Lambda \begin{pmatrix} E_p \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

1. $\frac{d^3\vec{p}}{2E_p} = \frac{d^3\vec{p}}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$ ist ein Lorentz-invariantes Integrationsmaß:

$$\frac{d^3\vec{p}'}{2\sqrt{\vec{p}'^2 + m^2}} = \frac{d^3\vec{p}}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$

D.h. wenn $f(p)$ Lorentz-invariant ist, dann ist auch $\int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} f(p)$ Lorentz-invariant, denn

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dp^0 \delta(p^2 - m^2) &= \int_0^\infty dp^0 \delta(p^{0\,2} - \vec{p}^2 - m^2) \stackrel{x=p^0}{=} \int_0^\infty \frac{dx}{2\sqrt{x}} \delta(x - \vec{p}^2 - m^2) = \frac{1}{2E_p} \\ \text{also : } \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} f(p) &= \int_{p^0>0} \underbrace{d^4p \delta(p^2 - m^2) f(p)}_{\text{Lorentz-invariant}} \end{aligned}$$

2. Orthogonalität der Teilchenzustände

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_1 \dots \vec{q}_N | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_M \rangle &\propto \langle \vec{q}_1 \dots \vec{q}_N | a_{\vec{p}_1}^\dagger \dots a_{\vec{p}_M}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a_{\vec{p}_1} \dots a_{\vec{p}_M} | \vec{q}_1 \dots \vec{q}_N \rangle^* \\ &\propto \langle 0 | a_{\vec{p}_1} \dots a_{\vec{p}_M} a_{\vec{q}_1}^\dagger \dots a_{\vec{q}_M}^\dagger | 0 \rangle^* \end{aligned}$$

Falls ein $\vec{p}_j \notin \{\vec{q}_1 \dots \vec{q}_N\}$, dann kann man den Erzeuger $a_{\vec{p}_j}$ nach rechts durchtauschen und $a_{\vec{p}_j} a_{\vec{q}_1}^\dagger \dots a_{\vec{q}_M}^\dagger | 0 \rangle = a_{\vec{q}_1}^\dagger \dots a_{\vec{q}_M}^\dagger a_{\vec{p}_j} | 0 \rangle = 0$.
D.h.

$$\langle \vec{q}_1 \dots \vec{q}_N | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_M \rangle = 0 \Leftrightarrow \{\vec{q}_1 \dots \vec{q}_N\} \neq \{\vec{p}_1 \dots \vec{p}_M\}$$

Mit unserer Identifikation in (129) als Einteilchen-Zustand mit Impuls $\vec{p}$, den Vielteilchen-zuständen (134), der Fourier-Darstellung (116) und den Vertauschungsrelationen (119), (120) können wir nun alle Matrixelemente der freien Klein-Gordon-Theorie bestimmen. (d.h. die freie KG-Theorie ist exakt lösbar)

1. Zusammenhang mit ebenen Wellen

$$\begin{aligned} \phi(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\exp(-ipx) a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger \exp(ipx) \right) \Big|_{p^0=E_p} | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \exp(ipx) | \vec{p} \rangle \\ &= \text{Superposition von Einteilchen-Zuständen,} \\ &\quad \text{die wie ebene Wellen propagieren} \end{aligned}$$

2. Zusammenhang mit der relativistischen Quantenmechanik

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} (a_{\vec{p}'} \exp(-ip'x) + a_{\vec{p}'}^\dagger \exp(ip'x)) \sqrt{2E_p} a_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle \\
\text{Term} &\propto \underbrace{\langle 0 | a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle}_{=0} = 0 \\
\text{Term} &\propto \langle 0 | a_{\vec{p}'} a_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') + \underbrace{a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger}_{=0} | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \\
\langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{E_{p'}}} \exp(-ip'x) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') | 0 \rangle \\
&= \exp(-ipx) \quad \text{mit } p^0 = E_p
\end{aligned} \tag{146}$$

$\langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle$ hat die Eigenschaften einer Einteilchen-Wellenfunktion

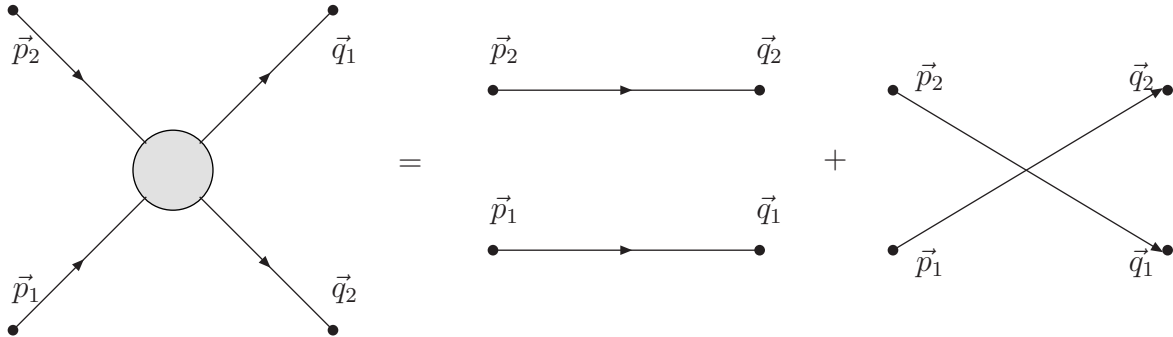
z.B. $(\square + m^2) \langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle = 0$

$\Rightarrow$ Kontakt zur relativistischen Quantenmechanik, die auf Probleme mit Energien unterhalb der Paarerzeugungsschwelle $2mc^2$ anwendbar ist.

3. Übergangsamplitude von $|\vec{p}_1 \vec{p}_2\rangle$ in $|\vec{q}_1 \vec{q}_2\rangle$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\sqrt{E_{p_1} E_{p_2} E_{q_1} E_{q_2}}} \langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle = \langle 0 | a_{q_1} a_{q_2} a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | a_{q_1} a_{p_2}^\dagger | 0 \rangle (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) + \langle 0 | a_{q_1} a_{p_1}^\dagger a_{q_2} a_{p_2}^\dagger | 0 \rangle \\
&= (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \delta^{(3)}(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) + (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{q}_2 - \vec{p}_2)
\end{aligned} \tag{147}$$

Feynman-Diagramme für diesen „Streuprozess“ in der freien KG-Theorie:



Es findet keine Streuung statt, die einzelnen Impulse bleiben erhalten.

4. Ein Monom ϕ^n mit $n \geq 3$ heißt (Selbst-)Wechselwirkungsterm. Betrachtet man verschiedene Impulse $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ und

$$\int d^4x \langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 | \phi^4(x) | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle \tag{148}$$

Zunächst mit (137) und (141)

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= \exp(iPx)\phi(0)\exp(-iPx) \\
 \Rightarrow \phi^4(x) &= \exp(iPx)\phi^4(0)\exp(-iPx) \\
 \text{und } \exp(-iPx)|\vec{p}_1\vec{p}_2\rangle &= |\vec{p}_1\vec{p}_2\rangle \exp(-i(p_1 + p_2)x)|_{p_i^0=E_{p_i}} \\
 \langle\vec{q}_1\vec{q}_2|\phi^4(x)|\vec{p}_1\vec{p}_2\rangle &= \exp(i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)\vec{x}) \langle\vec{q}_1\vec{q}_2|\phi^4(0)|\vec{p}_1\vec{p}_2\rangle \quad (149)
 \end{aligned}$$

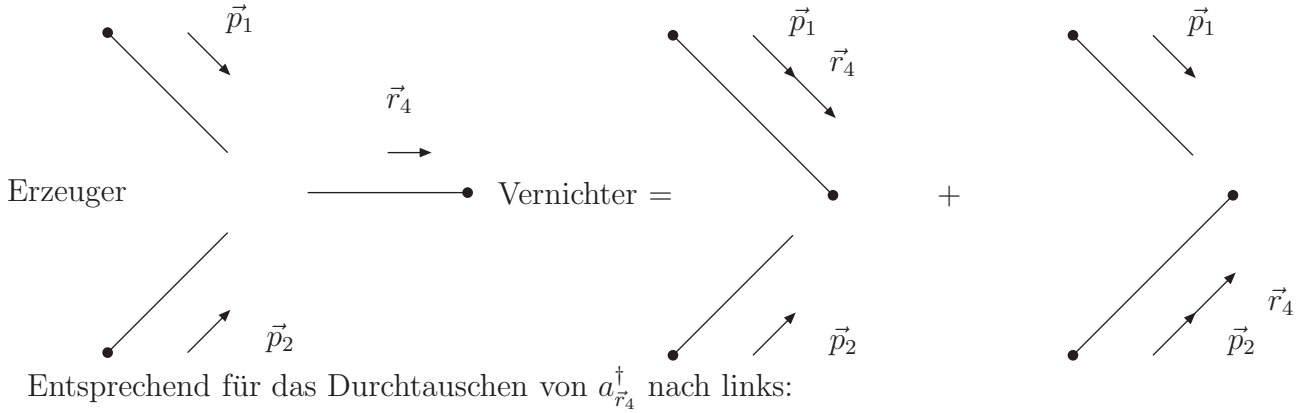
Betrachte $x = 0$:

$$\begin{aligned}
 \phi^4(0) &= \int \frac{d^3\vec{r}_1}{(2\pi)^3} \cdots \int \frac{d^3\vec{r}_4}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{r_1}}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2E_{r_4}}} (a_{\vec{r}_1} + a_{\vec{r}_1}^\dagger) \cdots (a_{\vec{r}_4} + a_{\vec{r}_4}^\dagger) \\
 &\Rightarrow \frac{1}{4\sqrt{E_{p_1}E_{p_2}E_{q_1}E_{p_2}}} \langle\vec{q}_1\vec{q}_2|\phi^4(0)|\vec{p}_1\vec{p}_2\rangle \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{E_{p_1}E_{p_2}E_{q_1}E_{p_2}}} \int \frac{d^3\vec{r}_1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{r_1}}} \cdots \int \frac{d^3\vec{r}_4}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{r_4}}} \\
 &\quad \langle 0|a_{\vec{q}_1}a_{\vec{q}_2}(a_{\vec{r}_1} + a_{\vec{r}_1}^\dagger)(a_{\vec{r}_2} + a_{\vec{r}_2}^\dagger)(a_{\vec{r}_3} + a_{\vec{r}_3}^\dagger)(a_{\vec{r}_4} + a_{\vec{r}_4}^\dagger)a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger|0\rangle \quad (150)
 \end{aligned}$$

Ziel: Erzeuger nach links, Vernichter nach rechts durchtauschen. Die einzigen nichtverschwindenden Terme kommen wieder aus Kommutatoren (z.B.)

$$a_{\vec{r}_4}a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger|0\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{r}_4 - \vec{p}_1)a_{\vec{p}_2}^\dagger|0\rangle + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{r}_4 - \vec{p}_2)a_{\vec{p}_1}^\dagger|0\rangle \quad (151)$$

Diese Operationen kann man graphisch darstellen:



Offensichtlich tragen nur die Terme in (150) bei, in denen die Zahl der Vernichter und Erzeuger gleich ist. Beim Durchtauschen der Erzeuger $a_{\vec{p}_j}^\dagger$ nach links und der Vernichter $a_{\vec{r}_j}$ nach rechts findet man δ -Funktionen, die wir mit einer Linie bezeichnen.

$$\begin{aligned}
 \phi^4(0) &\leftrightarrow (a_{\vec{r}_1} + a_{\vec{r}_1}^\dagger) \cdots (a_{\vec{r}_4} + a_{\vec{r}_4}^\dagger) \cong \begin{array}{c} \vec{r}_1 \\ | \\ \vec{r}_4 \text{---} \bullet \text{---} \vec{r}_2 \\ | \\ \vec{r}_3 \end{array} \\
 &\frac{1}{4\sqrt{E_{p_1}E_{p_2}E_{q_1}E_{p_2}}} \langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 | \phi^4(0) | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle \\
 &= \int \frac{d^3 \vec{r}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{r_1}}} \cdots \int \frac{d^3 \vec{r}_4}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{r_4}}} \begin{array}{c} \vec{p}_1 \quad \vec{q}_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \vec{r}_4 \text{---} \bullet \text{---} \vec{r}_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \vec{p}_2 \quad \vec{q}_2 \end{array} \\
 &= \int \frac{d^3 \vec{r}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{r_1}}} \cdots \int \frac{d^3 \vec{r}_4}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{r_4}}} \begin{array}{c} \vec{p}_1 \quad \vec{q}_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \vec{r}_4 \text{---} \bullet \text{---} \vec{r}_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \vec{p}_2 \quad \vec{q}_2 \end{array} + \text{alle Permutationen} \\
 &\quad \text{von } (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) \\
 &\quad + \begin{array}{c} \vec{p}_1 \quad \vec{q}_1 \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \vec{r}_4 \text{---} \bullet \text{---} \vec{r}_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \vec{p}_2 \quad \vec{q}_2 \end{array} + \text{andere unzusammenhängende} \\
 &\quad \text{Graphen}
 \end{aligned}$$

Alle unzusammenhängenden Graphen verschwinden, weil z.B. $\delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{q}_2) = 0$ wegen unserer Annahme $\vec{p}_1 \neq \vec{q}_1$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{4\sqrt{E_{p_1}E_{p_2}E_{q_1}E_{p_2}}} \langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 | \phi^4(0) | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle \\
 &= \int \frac{d^3 \vec{r}_1 \cdots d^3 \vec{r}_4}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{r_1}} \cdots (2\pi)^3 \sqrt{2E_{r_4}}} (2\pi)^{12} \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{r}_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_2 - \vec{r}_2) \delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{r}_3) \delta^{(3)}(\vec{q}_2 - \vec{r}_4) \\
 &\quad + \text{Permutationen von } (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{E_{p_1}E_{p_2}E_{q_1}E_{q_2}}} 4!
 \end{aligned}$$

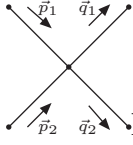
Also

$$\langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 | \phi^4(0) | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle = 4!$$

mit (148), (149) und $\langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 | \phi^4(0) | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle = 4!$ finden wir

$$\int d^4x \langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 | \phi^4(x) | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle = (2\pi)^3 \underbrace{\delta^{(3)}(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)}_{\text{Gesamtimpuls ist erhalten}} 4!$$

für paarweise verschiedene p_1, p_2, q_1, q_2 . Matrixelemente wie in (148) treten in wechselwirkenden Theorien auf. Wir haben sie durch **Feynman-Graphen** dargestellt.



hat die zum Term $\int d^4x \phi^4(x)$ gehörende **Streuamplitude** dargestellt. Wir können sie graphisch berechnen durch zeichnen der zusammenhängenden Graphen (nur ein Graph in unserem Beispiel).

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (2\pi)^{-\frac{3N}{2}} \int d^3\vec{p}_1 \cdots \int d^3\vec{p}_N f(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_N) a_{p_1}^\dagger \dots a_{p_N}^\dagger |0\rangle$$

ist ein **Wellenpaket** aus N-Teilchenzuständen. O.B.d.A ist f symmetrisch bzgl. $\vec{p}_i \leftrightarrow \vec{p}_j$

$$\begin{aligned} \langle f | f \rangle &= \frac{1}{N!} (2\pi)^{-3N} \int d^3\vec{p}_1 \cdots \int d^3\vec{p}_N \int d^3\vec{p}'_1 \cdots \int d^3\vec{p}'_N f^*(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_N) f(\vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_N) \\ &\quad \underbrace{\langle 0 | a_{p_1} \dots a_{p_N} a_{p'_1}^\dagger \dots a_{p'_N}^\dagger | 0 \rangle}_{N! \text{ Summanden}} \\ &= (2\pi)^{3N} \sum_{\pi \in S_N} \underbrace{\delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}_{\pi(1)}) \cdots \delta^{(3)}(\vec{p}_N - \vec{p}_{\pi(N)})}_{N! \text{ Summanden}} \\ &= \frac{1}{N!} (2\pi)^{-3N} (2\pi)^{3N} N! \int d^3\vec{p}_1 \cdots \int d^3\vec{p}_N |f(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_N)|^2 \end{aligned}$$

Alle $N!$ Summanden liefern das selbe wegen Symmetrie von $f(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_N)$.

$$\langle f | f \rangle < \infty \text{ für } \int d^3\vec{p}_1 \cdots \int d^3\vec{p}_N |f(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_N)|^2 < \infty$$

Diese Wellenpakete bilden den Hilbertraum der quantisierten KG-Theorie, den s.g. **Fock-raum** $\mathcal{F}$.

Genauer:

$$f = (f_0, f_1(\vec{p}_1), f_2(\vec{p}_1, \vec{p}_2), \dots, f_N(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N), \dots) \in \mathcal{F}$$

(alle Komponenten symmetrisch unter $\vec{p}_i \leftrightarrow \vec{p}_j$) mit dem Skalarprodukt

$$\langle f | f \rangle = |f_0|^2 + \int d^3\vec{p}_1 |f_1(\vec{p}_1)|^2 + \cdots + \int d^3\vec{p}_1 \cdots \int d^3\vec{p}_N |f(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_N)|^2 + \cdots$$

und die Wellenpakete für $|\vec{p}_i| \rightarrow \infty$ und für $N \rightarrow \infty$ genügend stark abfallen, dass $\langle f | f \rangle < \infty$

Betrachte $D(x-y) := \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$. $D(x-y)$ ist Funktion von $x-y$, denn

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | \exp(iPy) \phi(x-y) \exp(-iPy) \exp(iPy) \phi(0) \exp(-iPy) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \phi(x-y) \phi(0) | 0 \rangle \quad \text{mit (137), (141)} \\ D(x-y) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(-ipx)}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{\exp(ip'y)}{\sqrt{2E_{p'}}} \underbrace{\langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^\dagger | 0 \rangle}_{=(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')} \end{aligned}$$

denn Terme mit $\langle 0 | a_{\vec{p}}^\dagger$ und $a_{\vec{p}} | 0 \rangle$ verschwinden.

$\Rightarrow D(x - y)$ beschreibt die Erzeugung von Teilchen mit Impulsen $\vec{p}$ am Raumzeitpunkt y , die zum Raumzeitpunkt x propagieren und dort von $a_{\vec{p}}$ vernichtet werden.

$$D(x - y) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \exp(-ip(x - y)) \quad (153a)$$

1. Fall $(x - y)^2 > 0$: Wähle Bezugssystem mit $\vec{x} = \vec{y}$, also $x - y = \begin{pmatrix} x^0 - y^0 \\ 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

$$D(t) \stackrel{(153a)}{:=} D(x - y) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \exp\left(-i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}t\right) \quad (153b)$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \exp\left(-i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}t\right) \text{ mit Polarkoordinaten}$$

$$\text{Subst: } E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \Rightarrow |\vec{p}| = \sqrt{E^2 - m^2} \quad dE = \frac{2|\vec{p}| d|\vec{p}|}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

$$D(t) = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} \exp(-iEt) \quad (154)$$

Das Integral (154) konvergiert nicht. Erinnerung: $D(t)$ ist Distribution und muss mit Testfunktion f überintegriert werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) D(t) = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \exp(-iEt)}_{2\pi \tilde{f}(E) \text{ Fourier-Trafo}}$$

dieses Integral konvergiert

Einfacher: (154) ist analytisch in t für $\text{Im } t < 0$, denn mit $t = t_r + it_i$ ist

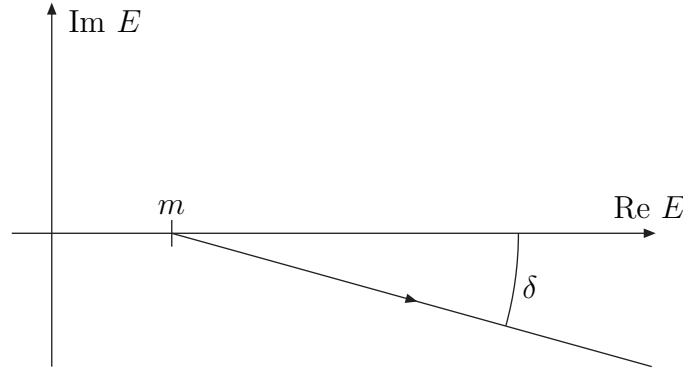
$$\exp(-iEt) = \exp(-iEt_r) \underbrace{\exp(Et_i)}_{\text{gedämpft für } t_i < 0}$$

D.h. wir können (154) für $\text{Im } t < 0$ ausrechnen und dann analytisch fortsetzen zu reellem t .

$$D(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} D(t - i\delta)$$

Äquivalent zu $t \rightarrow t + i\delta$ ist

$$\int_m^\infty \rightarrow \int_m^{\infty + i\delta} \quad \text{„Konturdeformation“}$$



Für $t \rightarrow \infty$ findet man

$$D(t) \simeq \exp(-imt)(-1-i)\sqrt{\pi}m^2(mt)^{-3/2} \left[1 + O\left(\frac{1}{mt}\right) \right] \quad (155a)$$

2. Fall $(x-y)^2 < 0$: Bezugssystem mit $x^0 = y^0$, $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$, $|\vec{r}| = r$
(153a) wird zu

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \exp(i\vec{p}\vec{r}) \\ \text{Polarkoordinaten} &: \vec{p}\vec{r} = |\vec{p}| r \cos \vartheta \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^2}{2E_p} \frac{\exp(i|\vec{p}|r) - \exp(-i|\vec{p}|r)}{i|\vec{p}|r} \\ &= -\frac{i}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty \exp(i\delta)}^{\infty \exp(i\delta)} d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}| \exp(i|\vec{p}|r)}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \end{aligned} \quad (155b)$$

$$D(x-y) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \exp(-mr)m^2(mr)^{3/2} \left[1 + O\left(\frac{1}{mr}\right) \right] \quad (156)$$

D.h. es gibt selbst zwischen raumartig getrennten Punkten x, y eine Korrelation, denn $D(x-y) \neq 0$. Diese exponentiell gedämpfte Korrelation wird durch **virtuelle Teilchen** vermittelt, die anscheinend von $a_{\vec{p}}^\dagger$ bei $\vec{y}$ erzeugt und bei $\vec{x}$ von $a_{\vec{p}}$ wieder vernichtet werden.

Beachte komplexes KG-Feld und $(x-y)^2 < 0$. $D(x-y) = \langle 0 | \phi^\dagger(x)\phi(y) | 0 \rangle$ beschreibt dann in einem Bezugssystem mit $\left\{ \begin{array}{l} x^0 > y^0 \\ x^0 < y^0 \end{array} \right\}$ die Propagation von virtuellen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Teilchen} \\ \text{Antiteilchen} \end{array} \right\}$ von $\left\{ \begin{array}{l} \vec{y} \text{ nach } \vec{x} \\ \vec{x} \text{ nach } \vec{y} \end{array} \right\}$.

Eine konsistente relativistische Quantenfeldtheorie enthält mit jedem Teilchen auch ein Antiteilchen mit gleicher Masse; dabei können Teilchen und Antiteilchen wie im Fall des reellen KG-Felds oder Photonfelds identisch sein.

Kommutator $[\phi(x), \phi(y)]$

$(x-y)^2 < 0$: $[\phi(x), \phi(y)] = 0$, denn es gibt ein Bezugssystem mit $x^0 = y^0$: $[\phi(x), \phi(y)]|_{x^0=y^0} = 0$ wegen Lorentzinvarianz ist $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ in jedem Bezugssystem mit $(x-y)^2 < 0$. Mit (116) finden wir sofort

$$\begin{aligned}
 [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_q}} \\
 &\quad \left[a_{\vec{p}} \exp(-ipx) + a_{\vec{p}}^\dagger \exp(ipx), a_{\vec{q}} \exp(-iqy) + a_{\vec{q}}^\dagger \exp(iqy) \right] \Big|_{p^0=E_p, q^0=E_q} \\
 (119), (120) \quad &\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\exp(-ip(x-y)) - \exp(ip(x-y))) \Big|_{p^0=E} \mathbf{1} \quad (157) \\
 (153a) \quad &= (D(x-y) - D(y-x)) \mathbf{1}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow [\phi(x), \phi(y)]$ ist proportional zum $\mathbf{1}$ -Operator in $\mathcal{F}$. An (155b) verifiziert man sofort, dass $D(x-y) = D(y-x)$ für $(x-y)^2 < 0$ also $[\phi(x), \phi(y)] = 0$.

$(x-y)^2 > 0$: Hier verschwindet (157) hingegen nicht. Mit (155a) finden wir (im Bezugssystem mit $\vec{x} = \vec{y}$):

$$[\phi(x), \phi(y)] \propto m^2 (mt)^{-3/2} (\exp(-imt) - \exp(imt)) \text{ für } t \rightarrow \infty$$

Für $(x-y)^2 < 0$ und $\vec{x} \neq \vec{y}$ findet man analog

$$[\partial_\mu \phi(x), \phi(y)] = 0 = \begin{cases} \text{folgt für } \mu = 0 \text{ aus (105)} \\ \text{folgt für } \mu = 1, 2, 3 \text{ aus } \partial_\mu [\phi(x), \phi(y)]|_{x^0=y^0} = 0 \end{cases}$$

Observablen wie die Viererimpulsdichte T_ν^0 in (93), (94) sind bilinear in $\phi, \partial_\mu \phi$. D.h. für $(x-y)^2 < 0$ ist z.B. $[T_\nu^0(x), T_\nu^0(y)] = 0$

$\Rightarrow$ Messungen an verschiedenen raumartig getrennten Punkten x, y vertauschen miteinander - diese Eigenschaft heißt **Mikrokausalität**.

Postuliert man „falsche“ Vertauschungsrelationen für die $a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger$ (Fermi-Dirac für ganzzahligen Spin, Bose-Einstein für halbzahligen Spin), so ist die Mikrokausalität verletzt.

$\Rightarrow$ **Spin-Statistik-Theorem**

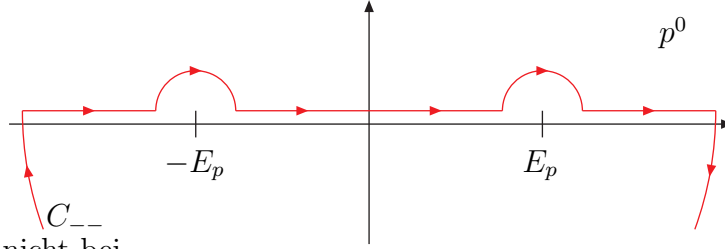
Der Kommutator ist wegen $[\phi(x), \phi(y)] = \mathbf{1} \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$ einfach zu studieren.

Für $x^0 > y^0$:

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \stackrel{(157)}{=} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\exp(-ip(x-y))}{2E_p} \Big|_{p^0=E_p} + \frac{\exp(-ip(x-y))}{-2E_p} \Big|_{p^0=-E_p} \right] \quad (158)$$

(Im 2. Term wurde $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ substituiert). Nun ist für $x^0 > y^0$:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{--}} dp^0 \underbrace{\frac{-1}{p^2 - m^2}}_{\text{Pole bei } p^0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm E_p} \exp(-ip^0(x^0 - y^0)) \\
 &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_{--}} dp^0 \frac{\exp(-ip^0(x^0 - y^0))}{(p^0 - E_p)(p^0 + E_p)} = \underbrace{\frac{\exp(-iE_p(x^0 - y^0))}{2E_p}}_{\text{Residuum bei } p^0 = E_p} + \underbrace{\frac{\exp(iE_p(x^0 - y^0))}{-2E_p}}_{\text{Residuum bei } p^0 = -E_p} \quad (159)
 \end{aligned}$$



Der Halbkreis trägt nicht bei.

(159) $\rightarrow$ (158) liefert

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= D_R(x-y) \text{ für } x^0 > y^0 \\
 \text{mit } D_R(x-y) &:= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{C_{--}} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} \exp(-ip(x-y)) \\
 &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^4} \int_{C_{--}} dp^0 \frac{i}{p^2 - m^2} \exp(-ip(x-y)) \quad (160)
 \end{aligned}$$

Für $x^0 < y^0$ müssen wir in (160) die Kontur C_{--} in der oberen Halbebene schließen. Es wird dann kein Pol eingeschlossen und

$$\begin{aligned}
 D_R(x-y) &= 0 \text{ für } x^0 < y^0 \\
 D_R(x-y) &= \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (161)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) D_R(x-y) &\stackrel{(161)}{=} (\square \Theta(x^0 - y^0)) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
 &\quad + 2 \underbrace{(\partial_\mu \Theta(x^0 - y^0))}_{\text{nur } \mu=0 \text{ trägt bei}} \langle 0 | [\partial^\mu \phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
 &\quad + \Theta(x^0 - y^0) (\square + m^2) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (162)
 \end{aligned}$$

Der erste Term in (162) ergibt:

$$\square \Theta(x^0 - y^0) = \partial_\mu \partial^\mu \Theta(x^0 - y^0) = \partial_0 \delta(x^0 - y^0) = \delta'(x^0 - y^0)$$

also

$$\begin{aligned}
 (\square \Theta(x^0 - y^0)) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= \delta'(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
 &= -\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\partial_0 \phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
 \text{denn } \delta'(t) f(t) &= -\delta(t) f'(t) - \delta(t) f(t) \frac{\partial}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Beweis: Sei $g(t)$ beliebige Testfunktion:

$$\begin{aligned}
 \int dt \delta'(t) f(t) g(t) &\stackrel{P.I.}{=} - \int dt \delta(t) (f'(t) g(t) + f(t) g'(t)) \\
 &= - \int dt \left(\delta(t) f'(t) + \delta(t) f(t) \frac{\partial}{\partial t} \right) g(t) \quad \text{qed.}
 \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = 0$$

Der dritte Term verschwindet wegen $(\square + m^2)\phi(x) = 0$

$$\begin{aligned} (162) \Rightarrow (\square + m^2)D_R(x - y) &= -\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\ &\quad + 2\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | \underbrace{[\pi(x), \phi(y)]}_{-i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})} | 0 \rangle \\ &= -i\delta^{(4)}(x - y) \end{aligned} \quad (163)$$

$\Rightarrow iD_R(x-y)$ ist die klassische, retardierte Greenfunktion zum Klein-Gordon-Operator $\square + m^2$. (D.h. $f(x) = \int D_R(x-y)g(y)d^4y$ ist Lösung der DGl. $(\square + m^2)f(x) = g(x)$.) Zur Probe berechnen wir $D_R(x-y)$ aus (163) mit einem Fourier-Ansatz:

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \exp(-ip'(x-y)) \tilde{D}_R(p') \quad (164)$$

Einsetzen in (163) und Multiplikation mit $\exp(ip(x-y))$:

$$\int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} (-p'^2 + m^2) \tilde{D}_R(p') \exp(ip(x-y)) = -i\delta^{(4)}(x-y) \exp(ip(x-y))$$

Integration über x ergibt wegen

$$\begin{aligned} \int d^4x \exp(ip(x-y)) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-y) \\ (-p^2 + m^2) \tilde{D}_R(p) &= -i \\ \tilde{D}_R(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2} \\ \stackrel{(164)}{\Rightarrow} D_R(x-y) &= \int_C \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} \exp(-ip(x-y)) \end{aligned} \quad (165)$$

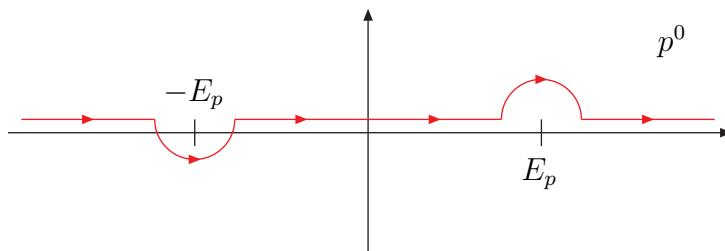
Zunächst beliebige Kontur, die den Polen bei $p^2 = m^2$ ausweicht.

$$D_R(x-y) = 0 \text{ für } x^0 < y^0 \Rightarrow C \simeq C_{--}$$

Nachteil: $D_R(x-y)$ ist proportional zu $\Theta(x^0 - y^0)$, also nicht analytisch in $x^0 - y^0$.

Besser: **Feynman-Propagator**

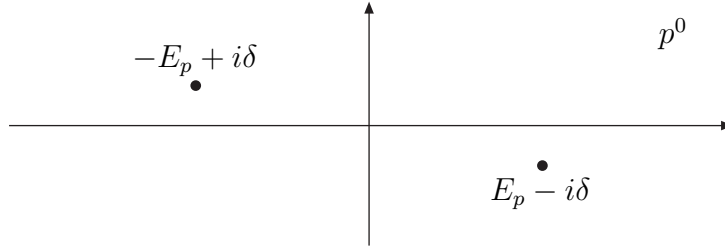
$$D_F(x-y) = \int_{C_{+-}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} \exp(-ip(x-y))$$



Man schreibt

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\delta} \exp(-ip(x-y)) \quad (166)$$

und versteht den Limes $\delta \rightarrow 0$. In (166) liegen die Pole $p_0 = \pm \sqrt{p^2 + m^2 - i\delta} \simeq \pm(E_p - i\delta)$



und für $\delta \rightarrow 0$ ist:

$$\int d^4 p \frac{i}{p^2 - m^2 + i\delta} = \int_{C_{+-}} d^4 p \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$D_F(x-y)$ in (166) heißt Feynman-Propagator. Für $\left\{ \begin{array}{l} x^0 < y^0 \\ x^0 > y^0 \end{array} \right\}$ können wir die Kontur in (166) in der $\left\{ \begin{array}{l} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{array} \right\}$ Halbebene schließen und finden mit $D(x-y) = \langle 0 | \phi(x), \phi(y) | 0 \rangle$ aus (153a):

$$D_F(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) D(x-y) + \Theta(y^0 - x^0) D(y-x) = \langle 0 | \mathbf{T} \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (167)$$

Mit dem zeitgeordneten Produkt

$$\mathbf{T} \phi(x) \phi(y) = \mathbf{T} \phi(y) \phi(x) = \Theta(x^0 - y^0) \phi(x) \phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \phi(y) \phi(x) \quad (168)$$

D.h. das Feld zur kleinsten Zeit steht ganz rechts. Für mehrere Felder hat man:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) &= \Theta(x_1^0 - x_2^0) \Theta(x_2^0 - x_3^0) \cdots \Theta(x_{n-1}^0 - x_n^0) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \\ &\quad + \text{Terme mit allen Permutationen von } (1, \dots, n) \end{aligned} \quad (169)$$

4.2 Komplexes Klein-Gordon-Feld

$$\mathcal{L} = \partial_\mu^* \phi \partial^\mu \phi - m |\phi|^2$$

$$\Rightarrow \quad \phi(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\underbrace{a_{\vec{p}}}_{\text{vernichtet Teilchen}} \exp(-ipx) + \underbrace{b_{\vec{p}}^\dagger}_{\text{erzeugt Antiteilchen}} \exp(ipx) \right) \quad (170)$$

$$[a_{\vec{p}}^{(\dagger)}, b_{\vec{p}'}^{(\dagger)}] = 0$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = [b_{\vec{p}}, b_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

U(1)-Symmetrie $\phi \rightarrow \phi \exp(i\alpha)$ $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ erhaltene Ladung (siehe (103))

$$Q = \int d^3 \vec{x} i (\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi) = \int d^3 \vec{x} i (\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi) = i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} - b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}})$$

$$D_F(x-y) = \langle 0 | \mathbf{T} \phi^\dagger(x) \phi(y) | 0 \rangle$$

4.3 Dirac-Feld

Mit

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (171)$$

ist $\exp(i\omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2})$ eine Darstellung der Lorentzgruppe. Wir hatten in (44) einen Spinor definiert

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \eta^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \text{ in Weyl-Basis}$$

Transformation unter Lorentztransformation Λ :

$$\psi \rightarrow \psi' = \begin{pmatrix} D^{(0,1/2)} & 0 \\ 0 & D^{(1/2,0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (172)$$

mit

$$D^{(1/2,0)}(\Lambda) = \exp\left((i\vec{\varphi} - \vec{u}) \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \quad (173a)$$

$$D^{(0,1/2)}(\Lambda) = \exp\left((i\vec{\varphi} + \vec{u}) \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \quad (173b)$$

Drehungen:

$$\omega_{0\nu} = 0, \omega_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}\varphi^l \quad (174)$$

$$\text{denn } \omega_{jk} M^{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}\varphi^l M^{jk} = \varphi^l J_l$$

$$\begin{aligned} \omega_{jk} \frac{\sigma^{jk}}{2} &\stackrel{(174)}{=} \frac{1}{4}\varepsilon_{jkl}\varphi^l \sigma^{jk} = \frac{1}{4}\varepsilon_{jkl}\varphi^l \frac{i}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \bar{\sigma}^j & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \bar{\sigma}^k & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{i}{8}\varepsilon_{jkl}\varphi^l \begin{pmatrix} \sigma^j \bar{\sigma}^k - \bar{\sigma}^k \sigma^j & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^j \sigma^k - \sigma^k \bar{\sigma}^j \end{pmatrix} \stackrel{\bar{\sigma}^k = -\sigma^k}{=} \frac{1}{4}\varepsilon_{jkl}\varphi^l \begin{pmatrix} \varepsilon_{jkn}\sigma^n & 0 \\ 0 & \varepsilon_{jkn}\sigma^n \end{pmatrix} \\ &\text{denn } [\sigma^j, \sigma^k] = 2i\varepsilon_{jkn}\sigma^n \\ &\stackrel{\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{jkn}=2\delta_{nl}}{=} \varphi^n \begin{pmatrix} \frac{\sigma^n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^n}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \frac{\vec{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & \vec{\varphi} \frac{\vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \exp\left(i\omega_{jk} \frac{\sigma^{jk}}{2}\right) = \begin{pmatrix} D^{(0,1/2)} & 0 \\ 0 & D^{(1/2,0)} \end{pmatrix} \text{ f\"ur Drehungen} \end{aligned}$$

Boosts:

$$\begin{aligned} \omega_{jk} &= 0, \quad \omega_{k0} = -\omega_{0k} = \frac{u_k}{2} \\ \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} &= \omega_{0k} \sigma^{0k} + \omega_{k0} \sigma^{k0} = 2\omega_{0k} \sigma^{0k} = i\omega_{0k} [\gamma^0, \gamma^k] \\ \omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} &= \frac{i}{2}\omega_{0k} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^k - \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k - \bar{\sigma}^k \end{pmatrix} = i\omega_{0k} \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow i\omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} = u_k \begin{pmatrix} -\frac{\sigma^k}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^k}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (175)$$

$$\Rightarrow \exp \left(i\omega_{jk} \frac{\sigma^{jk}}{2} \right) = \begin{pmatrix} D^{(0,1/2)} & 0 \\ 0 & D^{(1/2,0)} \end{pmatrix} \text{ für Boosts}$$

Damit haben wir $\sigma^{\mu\nu}$ in (171) als Generatoren der Lorentztransformationen auf Dirac-Spinoren identifiziert. Lösungen der freien Dirac-Gleichung:

Spinorfeld $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left(a_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) \exp(-ipx) + b_{\vec{p}}^{\dagger s} v^s(\vec{p}) \exp(ipx) \right) \Big|_{p^0=E_p} \quad (176)$$

u^s, v^s sind **Spinoren**, also Größen, die sich unter Lorentztransformationen wie

$$u^s(\vec{p}) \rightarrow u'^s(\vec{p}') = \exp \left(i\omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} \right) u^s(\vec{p}) \quad (177)$$

transformieren (entsprechend für $v^s(\vec{p})$).

$a_{\vec{p}}^r, b_{\vec{p}}^s$ sind Operatoren mit

$$\left\{ a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{p}'}^{\dagger s} \right\} = \left\{ b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{p}'}^{\dagger s} \right\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta^{rs} \quad (178)$$

Alle anderen Antikommutatoren verschwinden.

$a_{\vec{p}}^{\dagger s}$ erzeugt Fermion mit Impuls $\vec{p}$ und $S_3 = 3/2 - 1$ (S_3 im Ruhesystem definiert). $b_{\vec{p}}^{\dagger s}$ entsprechend für Antifermionen.

Spinoren:

$$(\not{p} - m) u^s(\vec{p}) = 0 \quad (179a)$$

$$(\not{p} + m) v^s(\vec{p}) = 0 \quad (179b)$$

Lösung von (179) in Weyl-Basis. In der Dirac-Basis findet man:

$$u^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{m}, \quad u^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{m}, \quad v^1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{m}, \quad v^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{m}$$

Beliebiges System ($k^0 = E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$)

$$u^{(\alpha)}(\vec{k}) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2(E_k + m)}} u^{(\alpha)}(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2}} \xi^{(\alpha)} \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{k}}{\sqrt{2(E+m)}} \xi^{(\alpha)} \end{pmatrix} \quad (180)$$

$$\text{mit } \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v^{(\alpha)}(\vec{k}) = \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{2(E_k + m)}} v^{(\alpha)}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \vec{k}}{\sqrt{2(E+m)}} \xi^{(\alpha)} \\ \sqrt{\frac{E+m}{2}} \xi^{(\alpha)} \end{pmatrix} \quad (181)$$

Die Antivertauschungsrelationen in (178) implizieren:

$$\left\{ \psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y) \right\} \Big|_{x^0=y^0} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta} \quad (182a)$$

$$\left\{ \psi_\alpha(x), \psi_\beta(y) \right\} \Big|_{x^0=y^0} = \left\{ \psi_\alpha^\dagger(x), \psi_\beta^\dagger(y) \right\} \Big|_{x^0=y^0} = 0 \quad (182b)$$

Noether-Ladungen

$$\text{Energie: } H = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_s E_p (a_{\vec{p}}^{\dagger s} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{\dagger s} b_{\vec{p}}^s) \quad (183a)$$

$$\text{Dreier-Impuls: } \vec{P} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_s \vec{p} (a_{\vec{p}}^{\dagger s} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{\dagger s} b_{\vec{p}}^s) \quad (183b)$$

$$\text{U(1)-Ladung: } Q = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_s (a_{\vec{p}}^{\dagger s} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^{\dagger s} b_{\vec{p}}^s) \quad (183c)$$

Mit

$$(p\sigma)(p\bar{\sigma}) = p_\mu p_\nu \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \underbrace{\{\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\nu\}}_{=2g^{\mu\nu}} = p_\mu p^\mu = p^2 = m^2 \quad (184)$$

und (in der Weyl-Basis)

$$u^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}} \xi^{(s)} \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \xi^{(s)} \end{pmatrix}$$

findet man die **Spin-Summe**:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^s(\vec{p}) \bar{u}^s(\vec{p}) &= \sum_{s=1,2} \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}} \xi^{(s)} \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \xi^{(s)} \end{pmatrix} (\xi^{\dagger(s)} \sqrt{p\bar{\sigma}} \quad \xi^{\dagger(s)} \sqrt{p\bar{\sigma}}) \\ &\stackrel{(184)}{=} \begin{pmatrix} m & p\sigma \\ p\bar{\sigma} & m \end{pmatrix} \text{ denn } \sum_{s=1,2} \xi^{(s)} \xi^{\dagger(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= p_\mu \gamma^\mu + m \mathbf{1} = \not{p} + m \end{aligned} \quad (185)$$

Ebenso:

$$\sum_{s=1,2} v^s(\vec{p}) \bar{v}^s(\vec{p}) = \not{p} - m \quad (186)$$

Dirac-Propagator

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \underbrace{\sum_s u_\alpha^s(\vec{p}) \bar{u}_\beta^s(\vec{p})}_{[\not{p} + m]_{\alpha\beta}, \text{siehe (185)}} \exp(-ip(x-y)) \\
&= [i\partial + m]_{\alpha\beta} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \exp(-ip(x-y)) \\
&\stackrel{(153a)}{=} [i\partial + m]_{\alpha\beta} \underbrace{D(x-y)}_{\text{KG-Propagator}}
\end{aligned} \tag{187}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \underbrace{\sum_s v_\alpha^s(\vec{p}) \bar{v}_\beta^s(\vec{p})}_{[\not{p} - m]_{\alpha\beta}} \exp(-ip(y-x)) \\
&= -[i\partial + m]_{\alpha\beta} D(y-x)
\end{aligned} \tag{188}$$

Aus der Summe von (187) und (188) finden wir

$$\langle 0 | \{ \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y) \} | 0 \rangle = [i\partial + m]_{\alpha\beta} (D(x-y) - D(y-x)) \tag{189}$$

Mit $D_R(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) (D(x-y) - D(y-x))$ erfüllt

$$S_R^{\alpha\beta}(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \{ \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y) \} | 0 \rangle \tag{190}$$

$$\text{wegen (189): } S_R(x-y) = (i\partial + m) D_R(x-y) \tag{191}$$

Mit

$$\begin{aligned}
(i\partial - m) S_R(x-y) &= ((i\partial)^2 - m^2) D_R(x-y) \\
&= -(\square + m^2) D_R(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow -iS_R(x-y)$ ist retardierte **Green-Funktion**

Feynman-Propagator:

$$\begin{aligned}
S_F(x-y) &:= \langle 0 | \mathbf{T} \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\delta} \exp(-ip(x-y))
\end{aligned} \tag{192}$$

Für Fermion-Felder ist:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) &= \Theta(x^0 - y^0) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) - \Theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) \\
\mathbf{T} \overset{(-)}{\psi}(x_1) \cdots \overset{(-)}{\psi}(x_n) &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi \Theta(x_{\pi(1)} - x_{\pi(2)}) \cdots \Theta(x_{\pi(n-1)} - x_{\pi(n)}) \overset{(-)}{\psi}(x_1) \cdots \overset{(-)}{\psi}(x_n)
\end{aligned}$$

Achtung:

$$\mathbf{T} \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) = -\mathbf{T} \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x)$$

5 Wechselwirkende Felder

5.1 Operatorformalismus für KG-Felder

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \quad \text{mit } \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0[\phi] = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (193)$$

Lagrangedichte des freien, reellen Klein-Gordon-Feldes

$$\mathcal{L}_{int}[\phi] = -\mathcal{H}_{int}[\phi] = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (194)$$

Wechselwirkung(sterm)

Euler-Lagrange-Gleichung

$$[\square + m^2] \phi = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3 \quad (195)$$

nicht mehr linear in ϕ , die verschiedenen Fourier-Komponenten $a_k \exp(-ikx)$ sind miteinander gekoppelt.

$\Rightarrow \mathcal{L}_{int}$ beschreibt Selbstwechselwirkung

Beispiel: Higgs-Feld

Hamilton-Operator:

$$H = H_0 + H_{int}$$

$$H_0[\phi] = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}_0[\phi(x)]$$

Hamilton-Operator der freien Theorie

$$H_{int}[\phi] = \int d^3\vec{x} \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (196)$$

Die Zeitentwicklung kennen wir aus Gleichung (137b) (bzw. in differentieller Form aus Gleichung (122)).

- Operator im Heisenbergbild:

$$\phi(t, \vec{x}) = \exp(iH(t - t_0))\phi(t_0, \vec{x})\exp(-iH(t - t_0)) \quad (197)$$

- Operator im **Wechselwirkungsbild** (= Dirac-Bild):

$$\phi_I(t, \vec{x}) = \exp(iH_0(t - t_0))\phi(t_0, \vec{x})\exp(-iH_0(t - t_0)) \quad (198)$$

ϕ_I ist auch Funktion von t_0 (also nicht nur Funktion von $t - t_0$ oder t)

$$\phi_I(t, \vec{x}) = \phi_I(t, \vec{x}, t_0) \quad \phi_I(t_0, \vec{x}, t_0) = \phi(t_0, \vec{x})$$

Vorteil: ϕ_I hat die Zeitentwicklung des *freien* Klein-Gordon-Feldes (siehe (116))

$$\phi_I(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p \exp(-ipx) + a_p^\dagger \exp(ipx)) \Big|_{x^0=t-t_0, p^0=E_p} \quad (199)$$

$$(197) \wedge (198) \Rightarrow \phi(t, \vec{x}) = U^\dagger(t, t_0) \phi_I(t, \vec{x}) U(t, t_0) \quad (200a)$$

mit dem **Zeitentwicklungsoperator** .

$$U(t, t_0) = \exp(iH_0(t - t_0)) \exp(-iH(t - t_0)) \quad (200b)$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= \exp(iH_0(t - t_0)) \underbrace{(H - H_0)}_{H_{int}} \exp(-iH(t - t_0)) \\ &= \exp(iH_0(t - t_0)) H_{int} \exp(-iH(t - t_0)) \\ &= H_I(t) U(t, t_0) \end{aligned} \quad (201)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } H_I(t) &= \exp(iH_0(t - t_0)) H_{int} \exp(-iH_0(t - t_0)) \\ &= \int d^3\vec{x} \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4 \end{aligned} \quad (202)$$

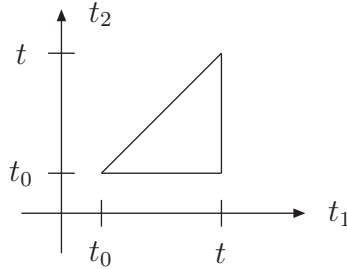
Wichtig: $[H_I(t_1), H_I(t_2)] \neq 0$

Die Lösung von (201) ist die **Dyson-Reihe**:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \mathbf{1} - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + i^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots \\ &\quad \dots + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (203)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathbf{T} H_I(t_1) H_I(t_2) \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \right] \mathbf{T} H_I(t_1) H_I(t_2) \end{aligned}$$



($t \geq t_1 \geq t_2 \geq t_0$) Im zweiten Integral benennen wir die Integrationsvariablen um: $t_1 \leftrightarrow t_2$ und nutzen $\mathbf{T} H_I(t_1) H_I(t_2) = \mathbf{T} H_I(t_2) H_I(t_1)$ aus:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \mathbf{T} H_I(t_1) H_I(t_2)$$

Durch vollständige Induktion:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \cdots H_I(t_n) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n \mathbf{T} H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)$$

und (203) wird zu

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n \mathbf{T} H_I(t_1) \cdots H_I(t_n) \\ &= \mathbf{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right] \quad \text{„Zeitgeordnete Exponentialfunktion“} \end{aligned} \quad (204)$$

Eigenschaften:

- Für $t = t_0$:

$$U(t_0, t_0) = 1 \quad (205)$$

- Unitarität:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) &\stackrel{(201)}{=} -U^\dagger(t, t_0) H_I(t) U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0) H_I(t) U(t, t_0) = 0 \\ \Rightarrow U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) &= \text{const} \stackrel{(205)}{=} 1 \Rightarrow U(t, t_0) \text{ unitär} \end{aligned} \quad (206)$$

$$\begin{aligned} U(t_1, t_2) &:= U(t_1, t_0) U^\dagger(t_2, t_0) \\ &\stackrel{(200b)}{=} \exp(iH_0(t_1 - t_0)) \exp(-iH(t_1 - t_0)) \\ &\quad \exp(iH(t_2 - t_0)) \exp(-iH_0(t_2 - t_0)) \\ &= \exp(iH_0(t_1 - t_0)) \exp(iH(t_2 - t_1)) \exp(-iH_0(t_2 - t_0)) \end{aligned} \quad (207)$$

erfüllt

$$U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3) \quad (208)$$

und

$$U^\dagger(t_1, t_2) = U(t_2, t_1) \quad (209)$$

Durch Multiplikation (201) $\cdot U^\dagger(t_2, t_0)$ findet man mit (207) die DGL.:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_2) &= H_I(t) U(t, t_2) \\ \Rightarrow U(t, t_2) &= \mathbf{T} \exp \left[-i \int_{t_2}^t dt' H_I(t') \right] \\ \text{denn } U(t_2, t_2) &\stackrel{(207)(206)}{=} 1 \end{aligned} \quad (210)$$

$\Rightarrow$ Auf den Referenzpunkt t_0 (bei dem $\phi(t_0, \vec{x}) = \phi_I(t_0, \vec{x})$ gewählt war) kommt es nicht an.

Wähle nun $t_0 = 0$:

Vakuum-Zustand der WW. Theorie $|0\rangle_I \neq |0\rangle$ Vakuum-Zustand der freien Theorie

Grundzustandsenergie $E_0 = {}_I \langle 0 | H | 0 \rangle_I$

$$\exp(-iHt) |0\rangle = \sum_n \exp(-iE_n t) |n\rangle_I {}_I \langle n | 0 \rangle$$

E_n Eigenwerte von H

Limes $t \rightarrow \infty(1 - i\delta)$

$$\begin{aligned} \exp(-iHt) |0\rangle &\xrightarrow{t \rightarrow \infty(1-i\delta)} \exp(-iE_0 t) {}_I \langle 0 | 0 \rangle |0\rangle_I \\ \Rightarrow |0\rangle_I &\xrightarrow{t \rightarrow \infty(1-i\delta)} \frac{\exp(-iHt) \exp(iE_0 t)}{{}_I \langle 0 | 0 \rangle} |0\rangle \\ |0\rangle_I &\stackrel{H_0|0\rangle=0}{\cong} \frac{\exp(iE_0 t) \exp(-iHt) \exp(iH_0 t)}{{}_I \langle 0 | 0 \rangle} |0\rangle \end{aligned} \quad (211a)$$

$$\stackrel{(207)}{=} \frac{\exp(iE_0 t) U(0, -t)}{{}_I \langle 0 | 0 \rangle} |0\rangle \quad (211b)$$

mit $t_0=t_1=0, t_2=-t$

$$\text{analog: } {}_I \langle 0 | \xrightarrow{t \rightarrow -\infty(1-i\delta)} \langle 0 | \frac{\exp(iHt) \exp(-iE_0 t)}{\langle 0 | 0 \rangle_I} = \langle 0 | \frac{U(-t, 0) \exp(-iE_0 t)}{\langle 0 | 0 \rangle_I} \quad (211c)$$

$$\text{mit } t \rightarrow -t : {}_I \langle 0 | \xrightarrow{t \rightarrow \infty(1-i\delta)} \langle 0 | \frac{U(t, 0) \exp(iE_0 t)}{\langle 0 | 0 \rangle_I} \quad (212)$$

$$\begin{aligned} (211) \wedge (212) &\Rightarrow 1 \stackrel{!}{=} {}_I \langle 0 | 0 \rangle_I \xrightarrow{t \rightarrow \infty(1-i\delta)} \frac{\overbrace{\langle 0 | U(t, 0) U(0, -t) | 0 \rangle}^{U(t, -t)}}{|\langle 0 | 0 \rangle_I|^2} \exp(2iE_0 t) \\ &\Rightarrow |\langle 0 | 0 \rangle_I|^2 = \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\delta)} \exp(2iE_0 t) \langle 0 | U(t, -t) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (213)$$

Mit (200) und (207) findet man für $x_0 > y_0$:

$$\phi(x) \phi(y) = U^\dagger(x_0, 0) \phi_I(x) U(x_0, y_0) \phi_I(y) U(y_0, 0) \quad (214)$$

so dass wir die **Zweipunkt-Greenfunktion**

$$\begin{aligned} {}_I \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle_I &\stackrel{(211)(212)(214)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\delta)} \frac{\overbrace{\langle 0 | U(t, x_0) \phi_I(x) U(x_0, y_0) \phi_I(y) U(y_0, -t) | 0 \rangle}^{\text{zeitgeordnet } t > x_0 > y_0 > -t}}{|\langle 0 | 0 \rangle_I|^2 \exp(-2iE_0 t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\delta)} \frac{\langle 0 | \mathbf{T} \left[\phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left(-i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right) \right] | 0 \rangle}{|\langle 0 | 0 \rangle_I|^2 \exp(-2iE_0 t)} \end{aligned}$$

Verallgemeinerung für $x^0 > y^0$ oder $x^0 < y^0$

$${}_I \langle 0 | \mathbf{T} [\phi(x) \phi(y)] | 0 \rangle_I \stackrel{(213)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\delta)} \frac{\langle 0 | \mathbf{T} \left[\phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left(-i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathbf{T} \exp \left(-i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right) | 0 \rangle} \quad (215)$$

Hierbei ist definiert:

$$\begin{aligned} & \mathbf{T} \left[\phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left(-i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right) \right] \\ &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-t}^t dt_1 \cdots \int_{-t}^t dt_n \mathbf{T} [\phi_I(x) \phi_I(y) H_I(t_1) \dots H_I(t_n)] \end{aligned} \quad (216)$$

(215) verallgemeinert sich einfach zu

$$\begin{aligned} G_n(x_1 \dots x_n) &:= {}_I \langle 0 | \mathbf{T} [\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle_I \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\delta)} \frac{\langle 0 | \mathbf{T} \left[\phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left(-i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathbf{T} \exp \left(-i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right) | 0 \rangle} \end{aligned} \quad (217)$$

5.1.1 Källén-Lehmann-Spektraldarstellung

Eigenzustände von H und $\vec{P}$:

$$H |\lambda_{\vec{p}}\rangle = E_p |\lambda_{\vec{p}}\rangle, \quad E_p = E_p(\lambda_{\vec{p}}) \quad (218a)$$

$$\vec{P} |\lambda_{\vec{p}}\rangle = \vec{p} |\lambda_{\vec{p}}\rangle \quad (218b)$$

Erinnerung: Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe. Eigenzustände können mit den Eigenwerten $m_\lambda^2 > 0$ des Operators $P^2 = P_\mu P^\mu = H^2 - \vec{p}^2$ identifiziert werden.

$$P^2 |\lambda_{\vec{p}}\rangle = m_\lambda^2 |\lambda_{\vec{p}}\rangle \quad (218c)$$

(Außerdem mit weiterer Quantenzahl aus $W^2 = -m_\lambda^2 s(s+1)$, wobei $s = 0$ für skalare Theorien.)

Aus (218) folgt mit $P^2 = H^2 - \vec{P}^2$:

$$E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m_\lambda^2}$$

m_λ heißt „Masse des Zustands λ_p “. In einer wechselwirkenden Theorie ist m_λ z.B. die Summe der Ruhemassen eines Vielteilchenzustands plus deren Bindungsenergie.

Mit der Normierung (analog zu (131)):

$$\langle \lambda_p | \lambda_q \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) \quad (219a)$$

ist die Vollständigkeitsrelation

$$\mathbf{1} = \underbrace{|0\rangle_I \langle 0|}_\text{Vakuum mit } m=0, E_p=0} + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\lambda_p\rangle \langle \lambda_p| \quad (219b)$$

Also (für $x_0 > y_0$):

$${}_I \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle_I = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} {}_I \langle 0 | \phi(x) | \lambda_p \rangle \langle \lambda_p | \phi(y) | 0 \rangle_I \quad (220)$$

wobei ${}_I \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle_I = 0$ gewählt ist, was sich durch kalibrieren gemäß

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) - {}_I \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle_I$$

erreichen lässt. In (220):

$$\begin{aligned} {}_I \langle 0 | \phi(x) | \lambda_p \rangle &= \underbrace{{}_I \langle 0 | \exp(iP x) \phi(0) \exp(-iP x) | \lambda_p \rangle}_{\substack{{}_I \langle 0 | \\ \exp(-ip x) | \lambda_p \rangle}} \\ &= {}_I \langle 0 | \phi(0) | \lambda_p \rangle \exp(-ip x)|_{p^0=E_p} \quad (\text{nun Lorentzboost von } \vec{0} \text{ zu } \vec{p}): \\ &= {}_I \langle 0 | \phi(0) \exp(i \vec{u}_{\vec{p}} \vec{K}) | \lambda_0 \rangle \exp(-ip x)|_{p^0=E_p} \\ &= \underbrace{{}_I \langle 0 | \exp(i \vec{u}_{\vec{p}} \vec{K}) \exp(-i \vec{u}_{\vec{p}} \vec{K}) \phi(0) \exp(i \vec{u}_{\vec{p}} \vec{K}) | \lambda_0 \rangle}_{\substack{{}_I \langle 0 | \\ \phi(0), \text{denn } \phi \text{ ist ein Skalarfeld}}} \exp(-ip x)|_{p^0=E_p} \\ &= {}_I \langle 0 | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \exp(-ip x)|_{p^0=E_p} \end{aligned} \quad (221)$$

Mit

$$\frac{1}{2E_p} \exp(-ip(x-y)) \Big|_{p^0=E_p} = \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\delta} \exp(-ip(x-y))$$

und (221) wird (220) zu (für $x^0 > y^0$):

$$\begin{aligned} {}_I \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle_I &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \exp(-ip(x-y)) |{}_I \langle 0 | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2 \Big|_{p^0=E_p} \\ &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \underbrace{\frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\delta}}_{\text{Feynman-Propagator mit Masse } m_{\lambda}} \exp(-ip(x-y)) |{}_I \langle 0 | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2 \end{aligned} \quad (222)$$

Verallgemeinerung auf $x^0 > y^0$ oder $y^0 > x^0$:

$${}_I \langle 0 | \mathbf{T} [\phi(x) \phi(y)] | 0 \rangle_I = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y, M^2) \quad (223a)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } D_F(x-y, M^2) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - M^2 + i\delta} \exp(-ip(x-y)) \\ \text{und } \rho(M^2) &= \sum_{\lambda} 2\pi \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |{}_I \langle 0 | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2 \end{aligned} \quad (223b)$$

Für eine typische Theorie:

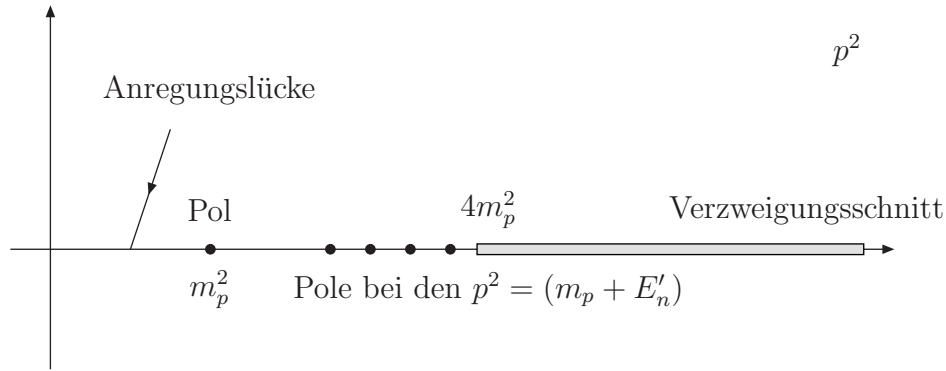
$$\begin{aligned} \rho(M^2) = & \sum_{\lambda} 2\pi \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) Z && \text{Einteilchenzustand mit Masse } m_p \\ & + \sum_n 2\pi \delta(M^2 - (2m_p - E'_n)^2) Z'_n && \text{Bindungszustände aus zwei} \\ & && \text{Teilchen mit Bindungsenergie } E'_n < 0 \\ & + \Theta(M^2 - 4m_p^2) \rho_C(M^2) && \text{Kontinuumszustände} \\ & && \text{z.B. Zwei-Teilchenzustand mit} \\ & && \text{Relativgeschwindigkeit} \end{aligned}$$

m_p = physikalische Masse = Masse aus Lagrangedichte plus Selbstwechselwirkung.
Fourier-Transformation von (223):

$$\begin{aligned} \tilde{G}_R(p) &:= \int d^4x \exp(ipx) {}_I \langle 0 | \mathbf{T} [\phi(0) \phi(0)] | 0 \rangle_I = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \frac{i \rho(M^2)}{p^2 - M^2 + i\delta} \\ &= \frac{i Z}{p^2 - m_p^2 + i\delta} + \sum_n \frac{i Z'_n}{p^2 - (2m_p^2 - E'_n)^2 + i\delta} + \int_{4m_p^2}^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \frac{i \rho(M^2)}{p^2 - M^2 + i\delta} \quad (224) \end{aligned}$$

(223) (bzw. (224)) heißt **Källén-Lehmann-Spektraldarstellung** .

Analytische Struktur:



Der Verzweigungsschnitt kommt aus

$$\int_{4m_p^2}^{\infty} \frac{dM^2}{p^2 - M^2 + i\delta} \approx \ln(4m_p^2 - p^2) \quad \text{„Zwei-Teilchen-Schnitt“}$$

Etwas bessere Art, $\rho(M^2)$ zu schreiben:

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda \in S_d} 2\pi \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |{}_I \langle 0 | \phi(0) | \lambda_0 \rangle_I|^2 + \int_{S_c} d\lambda 2\pi |{}_I \langle 0 | \phi(0) | \lambda_0 \rangle_I|^2$$

wobei S_d das diskrete und S_c das kontinuierliche Spektrum des Operators $P_{\mu} P^{\mu}$ bezeichnet (und $P^2 |\lambda\rangle = m_{\lambda}^2 |\lambda\rangle$). An der Källén-Lehmann-Spektraldarstellung (223) / (224) erkennt man:

1. Diskrete Eigenwerte von P^2 erzeugen einfache Pole $\frac{i Z}{p^2 - m_p^2 + i\delta}$ in $\tilde{G}_R(p)$, wie im Fall der *freien* Theorie. Das erlaubt analog die Interpretation als Ein-Teilchen-Zustände (Dabei kann dieses „eine Teilchen“ ein Bindungszustand wie z.B. Positronium sein, siehe

$$\frac{i Z_n}{p^2 - (2m_p^2 + E'_n)^2 + i\delta})$$

Unterschied zur freien Theorie: Residuum $Z \neq 1$ und $m_p \neq$ Masse in Lagrangedichte.

2. Das kontinuierliche Spektrum von P^2 erzeugt schwächere Singularitäten, Verzweigungspunkte.

Mit $\phi_R = \sqrt{Z}\phi$ findet man aus (223) / (224):

$$\tilde{G}_R(p) := {}_I \langle 0 | \mathbf{T} [\phi_R(x) \phi_R(y)] | 0 \rangle_I = \frac{\tilde{G}(p)}{Z} \xrightarrow{p^2 \rightarrow m_p^2} \frac{i}{p^2 - m_p^2 + i\delta} \quad (225)$$

d.h. die Zwei-Punkt-Funktion $\tilde{G}_R(p)$ verhält sich in der Nähe der Massenschale $p^2 = m_p^2$ wie eine freie Theorie. In die Herleitung von (223) / (224) gingen keine Annahmen über die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ ein, nur Symmetrieeigenschaften und milde Annahmen über das Spektrum von P^2 .

5.1.2 Asymptotische Zustände

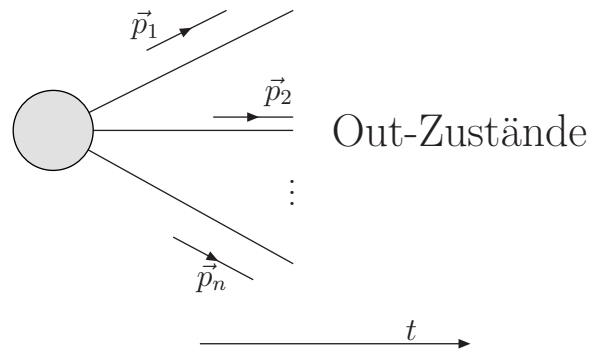
Im Wechselwirkungsbild hängen auch die Zustände von der Zeit ab. Entwickelt sich ein Zustand $|\alpha\rangle$ für $t \rightarrow \infty$ in einen N -Teilchen-Zustand der freien Theorie

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \cdots \int \frac{d^3 \vec{p}_1 \cdots d^3 \vec{p}_N}{(2\pi)^{3N/2} \sqrt{2E_{p_1}} \cdots \sqrt{2E_{p_N}}} f(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle \in \mathcal{F} \quad (226)$$

$\mathcal{F}$ = Zustandsraum der freien Theorie

so bezeichnet man $|\alpha\rangle$ als „Out“-Zustände (oder „auslaufenden Zustand“)

Graphisch:



Anschaulich: Für $t \rightarrow \infty$ überlappen die Wellenpakete der N auslaufenden Teilchen nicht mehr, sie spüren keine gegenseitige Wechselwirkung mehr. Zustände $|\beta\rangle$ mit

$$|\beta\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \cdots \int \frac{d^3 \vec{p}_1 \cdots d^3 \vec{p}_N}{(2\pi)^{3N/2} \sqrt{2E_{p_1}} \cdots \sqrt{2E_{p_N}}} f(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle \quad (227)$$

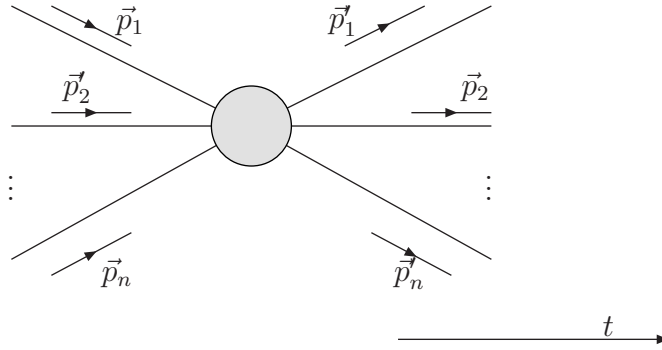
heißen entsprechend „In“-Zustände.

In einem Streuexperiment werden In-Zustände präpariert. Die aufeinander geschossenen Teilchen wechselwirken, die beobachteten aus der Wechselwirkungszone fliegenden Teilchen entsprechen Out-Zuständen, deren Impuls $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$ im Detektor gemessen werden.

Basisvektoren für $\left\{ \begin{array}{c} \text{In} \\ \text{Out} \end{array} \right\}$ -Zustände $\left\{ \begin{array}{c} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle_{in} \\ |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle_{out} \end{array} \right\}$ wobei diese zeitabhängigen Zustände

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle_{in/out} \xrightarrow{t \rightarrow \mp \infty} \underbrace{|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle}_{\text{freie Zustände}} \in \mathcal{F} \quad (228)$$

Streuexperiment: $|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle_{in} \rightarrow |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle_{out}$



In/Out-Zustände bezeichnet man auch als **asymptotische Zustände**. Wir nehmen weiterhin an, dass In- und Out-Zustände den Zustandsraum $\mathcal{H}$ der wechselwirkenden Theorie aufspannen.

$$H = [\{|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle_{in}\}] = [\{|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle_{out}\}] \quad (229)$$

(Mithin also $\mathcal{H} \simeq \mathcal{F}$ ist). Im Prinzip könnte $\mathcal{H}$ größer sein als $\mathcal{F}$, $\mathcal{H} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{H}'$, aber Zustände in $\mathcal{H}'$ wären in einem Streuexperiment nicht zugänglich. $\mathcal{H}'$ entspräche einem unerforschbarem Sektor der Theorie. Selbst exotische Fälle wie stabile Bindungszustände können in (228) / (229) mit einbezogen werden, wenn man sie zu den Basisvektoren hinzufügt. (Beispiel: $e^- + p = H$, d.h. $|\vec{p}_e, \vec{p}_p\rangle_{in}, |\vec{p}_H\rangle_{out}$)

Zeitentwicklung der Zustände im WW-Bild

Heisenberg-Bild:

$$\underbrace{{}_H \langle \beta |}_{\text{zeitunabhängig}} \phi(t, \vec{x}) \underbrace{|\alpha\rangle_H}_{\text{Zustände im WW-Bild}} \stackrel{(200)}{=} {}_H \langle \beta | U^\dagger(t, t_0) \phi_I(t, \vec{x}) U(t, t_0) |\alpha\rangle_H = \underbrace{{}_I \langle \beta, t |}_{\text{Zustände im WW-Bild}} \phi_I(t, \vec{x}) \underbrace{|\alpha, t\rangle_I}_{\text{Zustände im WW-Bild}}$$

$$\Rightarrow |\alpha, t\rangle_I = \underbrace{U(t, t_0)}_{\text{Zeitentwicklung wegen (210) durch } H_I \text{ bestimmt}} |\alpha\rangle_H \quad (230)$$

$$|\alpha, t_2\rangle_I = U(t_2, t_1) |\alpha, t_1\rangle_H \quad (231)$$

$$|\alpha, t\rangle_{in} = U(t, -t') |\alpha, -t'\rangle_{in} \stackrel{t' \rightarrow \infty}{=} U(t, -\infty) \underbrace{|\alpha\rangle}_{\text{(freier Zustand)}} \in \mathcal{F} \quad (232)$$

Bemerkung: $U(t, -\infty)$ bildet freie auf WW-Zustände ab. Es ist mathematisch unmöglich, $U(t, -\infty)$ auf dem gesamten Fockraum $\mathcal{F}$ zu definieren (Haag'sches Theorem), denn Poincaré-Invarianz verbietet, den Limes

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} U^\dagger(t, -t') |\alpha, -t'\rangle_{in} = |\alpha\rangle \in \mathcal{F}$$

gleichmäßig für alle $|\alpha, -t'\rangle_{in} \in \mathcal{H}$ zu bilden. Der Limes in (232) bzw.

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} U^\dagger(t, -t') |\alpha, t\rangle \stackrel{(232)}{=} |\alpha\rangle$$

ist jedoch definiert, der Limes wird für unterschiedliche Zustände jedoch unterschiedlich schnell angenommen, gilt also im Sinn der **schwachen Konvergenz**:

Übergangsamplitude von $|\alpha\rangle = |\vec{k}_1 \dots \vec{k}_N\rangle \in \mathcal{F}$ zu $|\beta\rangle = |\vec{p}_1 \dots \vec{p}_N\rangle \in \mathcal{F}$:

$${}_H \langle \beta | \alpha \rangle_H \stackrel{(230)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} {}_I \langle \beta, t | \underbrace{U(t, t_0) U^\dagger(-t, t_0)}_{U(-t, t)} |\alpha, -t\rangle_I \quad (233)$$

Ist

$$\begin{aligned} |\alpha, -\infty\rangle &= |\alpha, -\infty\rangle_{in} = |\vec{k}_1 \dots \vec{k}_M\rangle \in \mathcal{F} \\ |\beta, +\infty\rangle &= |\beta, +\infty\rangle_{out} = |\vec{p}_1 \dots \vec{p}_N\rangle \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

so ist

$$S_{\beta\alpha} := {}_H \langle \beta | \alpha \rangle_H = \left\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N | S | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_M \right\rangle \quad (234)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } S &= \mathbf{T} \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I(t') \right) = \mathbf{T} \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}_I(x) \right) \\ &= \mathbf{T} \exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{L}_I(x) \right) \end{aligned} \quad (235)$$

S heißt **S-Matrix** oder **Streumatrix** und beschreibt die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Streuung $|\alpha\rangle \rightarrow |\beta\rangle$. Offensichtlich ist

$$S_{\beta\alpha} = {}_{out} \langle \beta | \alpha \rangle_{in}$$

Erinnerung $\mathcal{H} = \mathcal{H}_I(\phi_I)$ und ϕ_I erfüllt wegen (198)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi_I = [\phi_I, H_0] \quad (236)$$

ϕ und ϕ_I sind über eine unitäre Transformation verknüpft, aus (105) folgt also:

$$[\phi(x), \dot{\phi}(x')]_{t=t'} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = [\phi_I(x), \dot{\phi}_I(x)]_{t=t'}$$

Die in (124) abgeleitete Beziehung gilt auch wie im WW-Bild

$$[\dot{\phi}_I(x), H_0] = i(\vec{\nabla}^2 - m^2)\phi_I(x) \quad (237)$$

und (analog zu (126)) findet man aus (236) und (237)

$$(\square + m^2)\phi_I(x) = 0 \quad (238)$$

D.h. ϕ_I erfüllt die **freie Klein-Gordon-Gleichung** und wir können ϕ_I durch Erzeuger $a_k^\dagger$ und Vernichter a_k ausdrücken.

Wir sind nun am Ziel:

Die Streuamplitude in (234)

$$S_{\beta\alpha} = \left\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N \mid \mathbf{T} \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}_I(x) \right) \mid \vec{k}_1 \dots \vec{k}_N \right\rangle \quad (239)$$

ist komplett durch Größen der *freien Theorie* ausgedrückt.

Typische Wechselwirkungen:

$$\mathcal{L}_I = -\mathcal{H}_I = \begin{cases} \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(x) & \times \\ \frac{\lambda}{3!} \phi_I^3(x) & \vee \end{cases}$$

Unter **Störungstheorie** versteht man die Entwicklung von $S_{\beta\alpha}$ in Potenzen von λ durch Entwickeln von

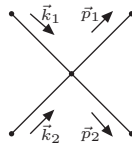
$$\begin{aligned} \mathbf{T} \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}_I(x) \right) &= \mathbf{T} \exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{L}_I(x) \right) \\ &= \mathbf{1} + i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) - \frac{1}{2} \iint d^4x d^4y \mathbf{T} \mathcal{L}_I(x) \mathcal{L}_I(y) + \dots \end{aligned}$$

Damit entwickelt man S in Potenzen von λ :

$$S = \sum_n S^{(n)} \text{ mit } S^{(n)} \propto \lambda^n$$

Für die ϕ^4 -Terme und $|\alpha\rangle = |\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle$, $|\beta\rangle = |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle$ hatten wir $S_{\beta\alpha}^{(1)}$ bereits zwischen (152) und (153a) berechnet (für verschiedene $\vec{k}_i, \vec{p}_j$):

$$S^{(1)} = i \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \left\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 \mid \phi_I^4(x) \mid \vec{k}_1, \vec{k}_2 \right\rangle = i\lambda(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)$$



Eigenschaften der asymptotischen Zustände und der S-Matrix:

1. Stabilität der Vakuums

$$|0\rangle_{in} = |0\rangle_{out} = |0\rangle_I \Rightarrow \langle 0 | S | 0 \rangle = 1$$

dies ist mit (211)-(213) verträglich für $E_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle_I = 0$.

(In Theorien mit $E_0 \neq 0$ können sich WW. Zustände nie in freie entwickeln)

2. Stabile Ein-Teilchen-Zustände

$$|\vec{p}\rangle_{in} = |\vec{p}\rangle_{out} = |\vec{p}\rangle_I = |\vec{p}\rangle \Rightarrow \langle \vec{p} | S | \vec{p}' \rangle = \langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

3. S ist unitär

$$S^\dagger S = 1$$

wegen $S = \mathbf{T} \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right)$ und $\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^\dagger$.

4. $|S_{\beta\alpha}|^2$ ist Poincaré-invariant, d.h. die Übergangswahrscheinlichkeit ist unabhängig vom Bezugssystem.

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &\rightarrow U(\Lambda, a) |\alpha\rangle = |\alpha'\rangle \\ \Rightarrow S &= U^\dagger(\Lambda, a) S U(\Lambda, a) \\ \text{und } S_{\beta'\alpha'} &= \langle \beta' | U^\dagger S U | \alpha' \rangle = S_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

weil $\mathcal{L}_I$ Poincaré-invariant ist.

Um S-Matrix-Elemente zu bestimmen, müssen wir zeitgeordnete Produkte ausrechnen.

Beispiel für ϕ^4 -Theorie: Ordnung λ^2 , $2 \rightarrow 4$ Streuprozess

$$S_{\beta\alpha}^{(2)} = - \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_4 | \frac{\lambda^2}{2} \int d^4x \int d^4y \mathbf{T} \frac{\phi_I^4(x) \phi_I^4(y)}{4! 4!} | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle \quad (240)$$

Translation: $\phi(y) = \exp(iPy) \phi(0) \exp(-iPy)$

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha}^{(2)} &= - \frac{\lambda^2}{2(4!)^2} \int d^4y \exp \left(iy (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \right) \Big|_{p_i^0=E_{p_i}, k_j^0=E_{k_j}} \\ &\quad \cdot \int d^4x \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_4 | \mathbf{T} \phi_I^4(x-y) \phi_I^4(0) | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle \\ &= - \frac{\lambda^2}{2(4!)^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \int d^4x \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_4 | \mathbf{T} \phi_I^4(x) \phi_I^4(0) | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \phi_I(x) &= \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \\ \phi_I^+(x) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p \exp(-ipx) \end{aligned} \quad (241a)$$

$$\phi_I^-(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p^\dagger \exp(ipx) \quad (241b)$$

so dass $\phi_I^+(x) |0\rangle = 0$, $\langle 0 | \phi_I^-(x) = 0$.

Für $x^0 > y^0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} [\phi_I(x) \phi_I(y)] &= (\phi_I^+(x) + \phi_I^-(x)) (\phi_I^+(y) + \phi_I^-(y)) \\ &= \phi_I^+(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(y) \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^-(y) + [\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)] \end{aligned} \quad (242)$$

Für $x^0 < y^0$ erhält man das gleiche mit

$$[\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)] \rightarrow [\phi_I^+(y), \phi_I^-(x)]$$

$$\mathbf{T} [\phi_I(x) \phi_I(y)] = \phi_I^+(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(y) \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^-(y) + \underline{\phi_I(x) \phi_I(y)} \quad (243)$$

mit der **Kontraktion**

$$\phi_I(x) \phi_I(y) := \begin{cases} [\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)] & \text{für } x^0 > y^0 \\ [\phi_I^+(y), \phi_I^-(x)] & \text{für } x^0 < y^0 \end{cases}$$

Einsetzen von (241) zeigt:

$$\phi_I(x) \phi_I(y) = D_F(x - y) \mathbf{1} \quad (244)$$

In (243) stehen alle Erzeuger links von allen Vernichtern $\Rightarrow$ Normalordnung

$$\mathbf{T} [\phi_I(x) \phi_I(y)] = : \phi(x)_I \phi(y)_I : + \underline{\phi_I(x) \phi_I(y)} \quad (245)$$

(Man schreibt auch $\mathbf{N} [\phi_I(x), \phi_I(y)] = : \phi_I(x) \phi_I(y) :$)

Mit (245) vereinfacht sich z.B.

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathbf{T} [\phi_I(x) \phi_I(y)] | 0 \rangle &= D_F(x - y) \\ \text{weil } \langle 0 | : \phi_I(x) \phi_I(y) : | 0 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung von (245) zu mehreren Feldern heißt **Wick'sches Theorem**:

$$\mathbf{T} [\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_N)] = : \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_N) + \text{alle möglichen Kontraktionen} \} : \quad (246)$$

Dabei bedeutet „alle möglichen Kontraktionen“, dass über alle Terme summiert wird, die $N - 2M$ normalgeordnete Felder und M Propagatoren $D_F(x_i - x_j) = \underline{\phi(x_i) \phi(x_j)}$ enthalten ($M = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$) z.B.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} [\phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3)] &= : \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) : + : \phi_I(x_1) : \underline{\phi_I(x_2) \phi_I(x_3)} \\ &+ : \phi_I(x_2) : \underline{\phi_I(x_1) \phi_I(x_3)} + : \phi_I(x_3) : \underline{\phi_I(x_1) \phi_I(x_2)} \end{aligned}$$

Formal:

Mit $J_{2M} := \{j_1, \dots, j_{2M}\}$, $J'_{2M} := \{j_{2M+1}, \dots, j_N\}$, $K_M := \{k_1, \dots, k_M\}$, $L_M := \{l_1, \dots, l_M\}$:

$$\mathbf{T} [\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_N)] = \sum_{M=0}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} \sum_{\substack{J_{2M} \cup J'_{2M} \\ = \{1, \dots, N\}}} : \phi_I(x_{j_{2M+1}}) \dots \phi_I(x_{j_N}) : \sum_{\substack{K_M \cup L_M = J_{2M} \\ k_m < l_m}} \prod_{m=1}^M \overbrace{\phi_I(x_{k_m}) \phi_I(x_{l_m})}^{D_F(x_{k_m} - x_{l_m})} \quad (247)$$

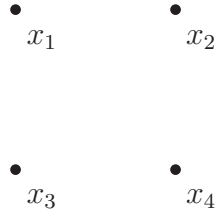
Dabei ist vereinbart, dass gilt $:: = 1$.

Beispiel: $N = 4$:

- $M = 0$

$$:\phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \phi_I(x_4):$$

graphisch:



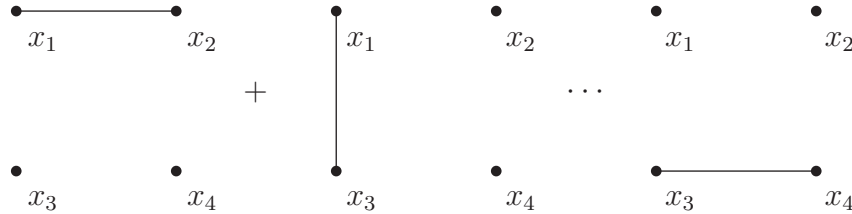
- $M = 1$

Summe über $\binom{4}{2} = 6$ Terme

$$J_{2M} \cup J'_{2M} = \{1, 2\} \cup \{3, 4\}, \{1, 3\} \cup \{2, 4\}, \{1, 4\} \cup \{2, 3\}, \\ \{2, 3\} \cup \{1, 4\}, \{2, 4\} \cup \{1, 3\}, \{3, 4\} \cup \{1, 2\}$$

$$:\phi_I(x_3)\phi_I(x_4):\phi_I(\underline{x_1})\phi_I(\underline{x_2}) + :\phi_I(x_2)\phi_I(x_4):\phi_I(\underline{x_1})\phi_I(\underline{x_3}) + \cdots + :\phi_I(x_1)\phi_I(x_2):\phi_I(\underline{x_3})\phi_I(\underline{x_4})$$

graphisch:



- $M = 2$

Letzte Summe in (247):

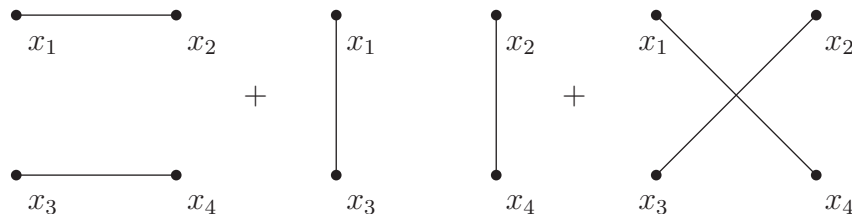
$$J_{2M} = \{j_1, \dots, j_{2M}\} = \{1, \dots, 4\}$$

Es gibt dabei drei Summanden zu $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (1, 2, 3, 4), (1, 3, 2, 4)$ und $(1, 3, 2, 4)$

Der $M = 2$ -Term ist also

$$\phi_I(\underline{x_1})\phi_I(\underline{x_2})\phi_I(\underline{x_3})\phi_I(\underline{x_4}) + \phi_I(\underline{x_1})\phi_I(\underline{x_3})\phi_I(\underline{x_2})\phi_I(\underline{x_4}) + \phi_I(\underline{x_1})\phi_I(\underline{x_4})\phi_I(\underline{x_2})\phi_I(\underline{x_3})$$

graphisch:



Beweis des Wickschen-Theorems (246) / (247):

Beide Seiten der Gleichung sind symmetrisch unter Permutationen der $x_1, \dots, x_N$. Wähle o.B.d.A.

$$x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_N^0 \Rightarrow \mathbf{T} [\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_N)] = \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_N)$$

Induktionsanfang:

$$N = 1 : \mathbf{T} [\phi_I(x_1)] = : \phi_I(x_1) :$$

Induktionsannahme: (246) / (247) gelten für $N - 1$ Felder

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} & \mathbf{T} [\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_N)] \\ &= \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_N) \stackrel{\text{Ind.-Annahme}}{=} \phi_I(x_1) : \{ \phi_I(x_2) \dots \phi_I(x_N) + \text{alle Kontraktionen} \} : \\ &= \sum_{M=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{\substack{J_{2M} \cup J'_{2M} \\ = \{2, \dots, M\}}} \phi_I(x_1) : \phi_I(x_{j_{2M+1}}) \dots \phi_I(x_{j_N}) : \sum_{\substack{K_M \cup L_M \\ k_M < l_M}} \prod_{m=1}^M \phi_I(\underline{x_{k_m}}) \phi_I(x_{l_m}) \end{aligned} \quad (248)$$

Mit $\phi_I(x_1) = \phi_I^+(x_1) + \phi_I^-(x_1)$ finden wir, dass ϕ_I^- bereits in Normalordnung zu den anderen Feldern steht:

$$\phi_I^-(x_1) : \phi_I(x_{j_{2M+1}}) \dots \phi_I(x_{j_N}) : = : \phi_I^-(x_1) \dots \phi_I(x_{j_N}) :$$

$\phi_I^+(x_1)$ müssen wir hingegen an allen Feldern vorbei nach rechts durchtauschen: $\phi_I^+(x_1)$ vertauscht mit $\phi_I^+(x_{j_k})$ und $[\phi_I^+(x_1), \phi_I^-(x_{j_k})] = \phi_I(x_1) \phi_I(x_{j_k})$ wegen $x_1^0 > x_{j_k}^0$. Also

$$\begin{aligned} \phi_I(x_1) : \phi_I(x_{j_{2M+1}}) \dots \phi_I(x_{j_N}) : &= : \phi_I(x_1) \phi_I(x_{j_{2M+1}}) \dots \phi_I(x_{j_N}) : \\ &+ \sum_{l \in J'_{2M}} : \phi_I(x_{j_{2M+1}}) \dots \widehat{\phi_I(x_l)} \dots \phi_I(x_{j_N}) : \phi_I(\underline{x_1}) \phi_I(x_l) \end{aligned} \quad (249)$$

Die Schreibweise $\widehat{\phi_I(x_l)}$ bedeutet, dass $\phi_I(x_l)$ nicht mehr vorkommt. Nun folgt Einsetzen von (249) in (248) und Koeffizientenvergleich mit (247). Betrachte ein bestimmtes J'_{2M} in (247):

1. Fall: $x_1 \in J'_{2M}$

$$: \phi_I(x_{j_{2M+1}}) \dots \phi_I(x_{j_N}) : = : \phi_I(x_1) \underbrace{\phi_I(x_{j_{2M+1}}) \dots \phi_I(x_{j_N})} : \\ \text{entspricht genau einem Term in (248) mit dem ersten Term (249)}$$

2. Fall: $x_1 \notin J'_{2M}$ (247) enthält:

$$\begin{aligned} & : \phi_I(x_{j_{2M+1}}) \dots \phi_I(x_{j_N}) : \sum_{\substack{K_M \cup L_M = J_{2M} \\ k_m < l_m}} \prod_{m=1}^M \phi_I(\underline{x_{k_m}}) \phi_I(x_{l_m}) \\ &= : \phi_I(x_{j_{2M+1}}) \dots \phi_I(x_{j_N}) : \left[\sum_{l=2}^M \phi_I(\underline{x_1}) \phi_I(x_l) \cdot \sum_{\substack{K_M \cup L_M = J_{2M} \\ 1 < k_m < l_m \\ k_m \neq l \neq l_m}} \prod_{m=2}^N \phi_I(\underline{x_{k_m}}) \phi_I(x_{l_m}) \right] \end{aligned}$$

Das entspricht dem Term in (248) / (249) mit $J'_{2M} \rightarrow J'_{2M} \cup \{l\}$, $J_{2M} \rightarrow J_{2M} \setminus \{l\}$. Normalgeordnete Produkte vereinfachen die Berechnung von Matrixelementen, weil alle Vernichter rechts stehen. Wegen $\phi_I^+(y) |0\rangle = 0$ ist z.B.

$$\begin{aligned} & :\phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_N) : |0\rangle = \phi_I^-(x_1) \cdots \phi_I^-(x_N) |0\rangle \\ & = \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \cdots \frac{d^3 \vec{k}_N}{(2\pi)^3 2E_{k_N}} \exp(-i(k_1 x_1 + \cdots + k_N x_N)) \Big|_{k_j^0=E_{k_j}} \left| \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_N \right\rangle \end{aligned}$$

Kontraktionen mit Zuständen

$$\phi_I^+(x) |\vec{p}\rangle = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} a_k \exp(-ikx) \underbrace{\sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle}_{|\vec{p}\rangle} \stackrel{[a_p, a_k^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}-\vec{p})}{=} \exp(-ipx) \Big|_{p^0=E_p} |0\rangle \quad (250)$$

Die $\phi_I^-(x)$ stehen links in normalgeordneten Produkten und $\langle \vec{p} | \phi_I^-(x) = \langle 0 | \exp(ipx) \Big|_{p^0=E_p}$. Definiert man

$$\phi_I(\underline{x}) |\vec{p}\rangle = \exp(-ipx) \Big|_{p^0=E_p} |0\rangle, \quad \langle \underline{\vec{p}} | \phi_I(x) = \langle 0 | \exp(ipx) \Big|_{p^0=E_p} \quad (251)$$

und

$$\phi_I(x) |\underline{\vec{p}_1 \dots \vec{p}_j \dots \vec{p}_N}\rangle = \exp(-ipx) \Big|_{p^0=E_p} |\vec{p}_1 \dots \widehat{\vec{p}_j} \dots \vec{p}_N\rangle$$

usw., so findet man:

$$\langle \vec{k}_1 \dots \vec{k}_N | : \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_N) : | \underline{\vec{p}_1 \dots \vec{p}_j \dots \vec{p}_N} \rangle$$

ist die Summe der Kontraktionen der Felder untereinander und mit den Impulsen der Zustände gegeben. Bleibt ein Feld unkontrahiert, so verschwindet das Matrixelement.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | : \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \phi_I(x_4) : | \underline{\vec{p}_1 \vec{p}_2} \rangle \\ & = \langle \underline{\vec{k}_1 \vec{k}_2} | : \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \phi_I(x_4) : | \underline{\vec{p}_1 \vec{p}_2} \rangle + \langle \underline{\vec{k}_1 \vec{k}_2} | : \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \phi_I(x_4) : | \underline{\vec{p}_1 \vec{p}_2} \rangle \\ & + \text{alle anderen Kontraktionen (4! = 24 insgesamt)} \\ & = \exp(i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - p_1 x_3 - p_2 x_4)) \Big|_{on-shell} \\ & + \text{alle Permutationen von } (x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

Mit dem Wickschen Theorem finden wir also die **Feynman-Regeln**.

$\langle \underline{\vec{p}_1 \dots \vec{p}_M} | \mathbf{T} \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) | \underline{\vec{k}_1 \dots \vec{k}_N} \rangle$ ist also durch Summe aller Kontraktionen der Felder untereinander und mit den Impulsen der Zustände gegeben. Die analytischen Ausdrücke für die Kontraktionen sind in (244) und (251) gegeben.

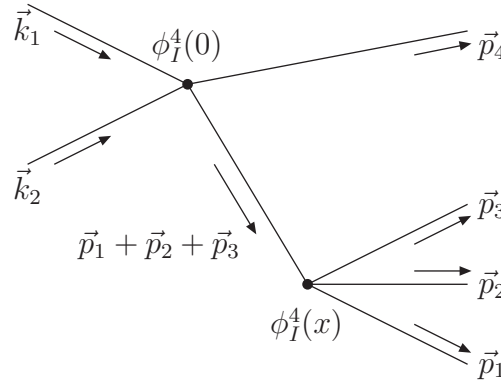
Beispiel der ϕ^4 -Theorie:

$$S_{\beta\alpha}^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{2(4!)^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \int d^4x \langle \underline{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3 \vec{p}_4} | \mathbf{T} \phi_I^4(x) \phi_I^4(0) | \underline{\vec{k}_1 \vec{k}_2} \rangle$$

Das Matrixelement $\langle \underline{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3 \vec{p}_4} | \mathbf{T} \phi_I^4(x) \phi_I^4(0) | \underline{\vec{k}_1 \vec{k}_2} \rangle$ kann mit den Feynman-Regeln berechnet werden: Exemplarische Wick-Kontraktion:

$$K_1 = -\frac{\lambda^2}{2(4!)^2} \int d^4x \langle \underline{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3 \vec{p}_4} | \mathbf{T} \phi_I^4(x) \phi_I^4(0) | \underline{\vec{k}_1 \vec{k}_2} \rangle$$

entspricht dem Diagramm 1:



Jede Kontraktion eines Matrixelements entspricht einem Feynman-Diagramm. Mehrere Kontraktionen können dem selben Diagramm entsprechen. Die internen Linien ergeben:

$$\phi_I(x)\phi_I(0) = D_F(x)$$

Externe Linien ergeben $\exp(ip_1x)$ etc.

Nummerieren wir die Wick-Kontraktionen K_j mit j durch, so können wir schreiben:

$$S_{\beta\alpha}^{(2)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - k_1 - k_2) \sum_j K_j \quad (252)$$

Unser Beispieldiagramm berechnen sich zu

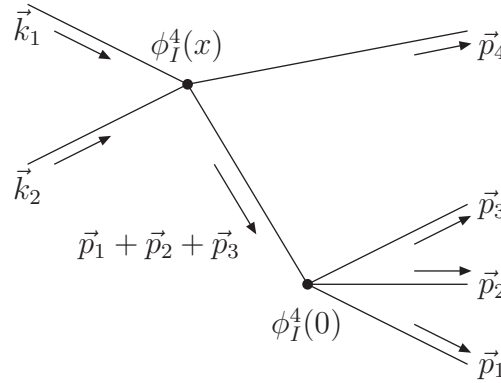
$$K_1 = -\frac{\lambda^2}{2(4!)^2} \underbrace{\int d^4x \exp(i(p_1x + p_2x + p_3x)) D_F(x)}_{\text{Fourier-Rücktransformation}}$$

Feynman-Propagator im Impulsraum:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_F(p) &:= \int d^4x \exp(ipx) D_F(x) \stackrel{(166)}{=} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\delta} \exp(i(p-k)x) \\ &= \underbrace{\frac{i}{p^2 - m^2 + i\delta}}_{\substack{\text{Achtung! Hier ist nicht } p^0=E_p \\ \text{ („off-shell“)}}}, \quad \text{denn } \int d^4x \exp(i(p-k)x) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-k) \end{aligned}$$

$$K_1 = -\frac{\lambda^2}{2(4!)^2} \tilde{D}_F(p_1 + p_2 + p_3) = -\frac{\lambda^2}{2(4!)^2} \frac{i}{(p_1 + p_2 + p_3)^2 - m^2 + i\delta} \quad (253)$$

Die Kontraktion K_2 liefert:



$$\begin{aligned}
 K_2 &= -\frac{\lambda^2}{2(4!)^2} \frac{i}{(p_4 - k_1 - k_2)^2 - m^2 + i\delta} \\
 &= K_1, \quad \text{da } p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \stackrel{(252)}{=} k_1 + k_2
 \end{aligned} \tag{254}$$

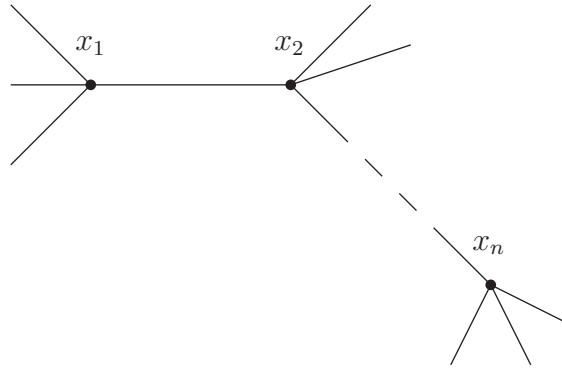
Aus (240):

$$S_{\beta\alpha}^{(2)} = - \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^2 \frac{1}{2} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3 \vec{p}_4 | \int d^4x \int d^4y \mathbf{T} \phi_I^4(x) \phi_I^4(y) | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle$$

ist offensichtlich, dass zwei Kontraktionen mit $\phi_I^4(x) \leftrightarrow \phi_I^4(y)$ das selbe Ergebnis liefern.

Allgemein:

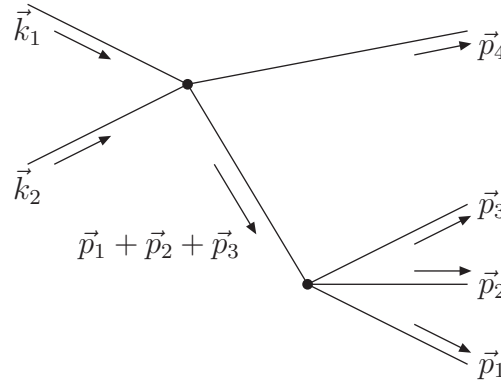
Ein Diagramm mit n Vertizes einer ϕ^m -Wechselwirkung



dass aus $\frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \phi^m(x_1) \cdots \phi^m(x_n)$ stammt, entspricht den $n!$ Kontraktionen die sich durch Permutationen $x_1, \dots, x_n$ auseinander gewinnen lassen. Alle ergeben dasselbe Ergebnis und der Vorfaktor $\frac{1}{n!}$ wird kompensiert.

$\Rightarrow$ In Feynman-Diagrammen muss man Vertizes nicht unterscheiden.

Es kommt bei Feynman-Diagrammen nur auf die Topologie an. Weiter bemerken wir an (253) und (254), dass wir der internen Linie unseres Diagramms 1 einen Impulsfluss zuordnen können.



D.h. die Integrationen $\int d^4x \int d^4y$ in (240) bewirken Impulserhaltung an jedem Vertex. Offensichtlich ändern Permutationen der Felder in einem Wechselwirkungsterm das Ergebnis nicht:

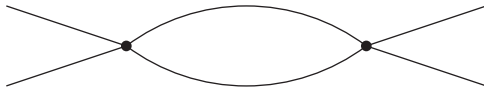
$$\begin{aligned} \dots \underbrace{\phi_I^4(0)} \underbrace{|\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle} &= \dots \underbrace{\phi_I(0)\phi_I(0)\phi_I(0)\phi_I(0)} \underbrace{|\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle} \\ &= \dots \underbrace{\phi_I(0)\phi_I(0)\phi_I(0)\phi_I(0)} \underbrace{|\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle} \end{aligned}$$

Ist der Vertex eines Diagrammes einer ϕ^m -Theorie mit m verschiedenen anderen Vertizes oder Impulsen in Zuständen verbunden, so entsprechen diesem Diagramm alle $m!$ Kontraktionen, die sich durch Permutation der m Felder gewinnen lassen.

$\Rightarrow$ Der Faktor $\frac{1}{m!}$ aus der Kopplung $\frac{\lambda}{m!}$ wird aufgehoben.

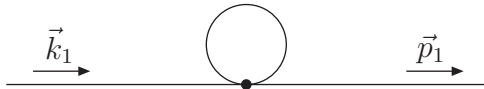
Diese Aufhebung ist nicht vollständig, wenn

1. zwei Vertizes mit mehr als einer Kontraktion verbunden sind, z.B.:



oder

2. ein Vertex mit sich selbst verbunden ist, z.B.:



Im ersten Fall finden wir für

$$\text{Diagram} : \dots \overbrace{\phi_I(x)\phi_I(x)\phi_I(x)\phi_I(x)\phi_I(y)\phi_I(y)\phi_I(y)\phi_I(y)} \dots$$

dass die simultane Vertauschung

$$\underbrace{\phi_I(x) \sim \phi_I(x)\phi_I(y) \sim \phi_I(y)}$$

zur selben Kontraktion führt.

$\Rightarrow$ Zum Diagramm gehören nur $\frac{4!4!}{2}$ Kontraktionen.

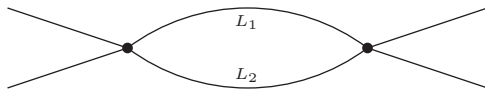
Man spricht von einem „Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$ “.

Den Symmetriefaktor kann man aus dem Diagramm ablesen: Unterscheidet man die Linien $L_1, \dots, L_n$ (aber nicht die Vertizes) eines Diagramms und ist das Diagramm invariant unter R Permutationen von Linien $L_{i_1}, \dots, L_{i_R}$, so trägt diese Symmetriegruppe einen Faktor $\frac{1}{R}$ zum Symmetriefaktor S bei. Gibt es mehrere solcher Permutationssymmetrische Untergraphen, dann ist der Symmetriefaktor das Produkt:

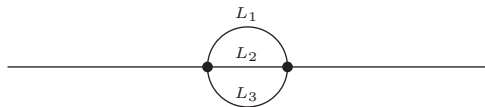
$$S = \frac{1}{R_1} \cdots \frac{1}{R_N}$$

für N Untergraphen mit Anzahl R_n von Symmetrieoperationen.

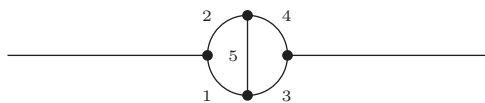
Beispiele:



Symmetrie bezüglich $L_1 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow$
Symmetriefaktor $S = \frac{1}{2}$



$$S = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

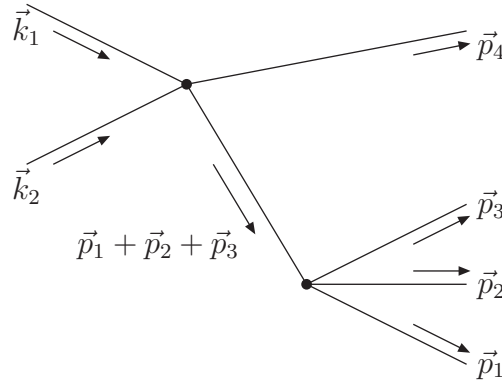


Symmetrie unter der simultanen
Vertauschung von $(1, 3) \leftrightarrow (2, 4)$
(und der zwei inneren Vertizes) $\Rightarrow$
 $S = \frac{1}{2}$

Im zweiten Fall findet man im Beispiel:

$$\text{---} \bigcirc \text{---} : \quad \cdots \underbrace{\phi_I(x)} \underbrace{\phi_I(x)} \underbrace{\phi_I(x)} \underbrace{\phi_I(x)} \cdots$$

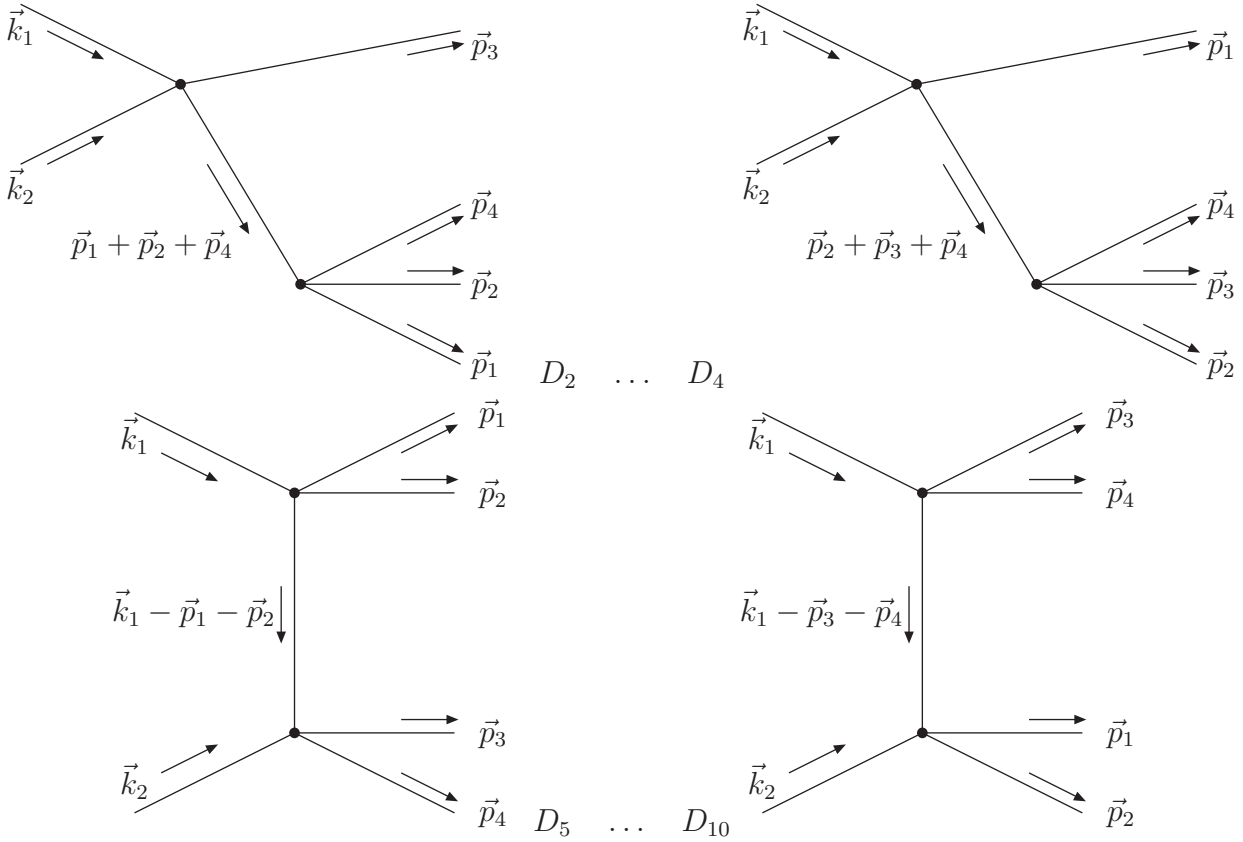
Die Vertauschung der kontrahierten Felder führt zur selben Kontraktion, es gibt also nur $\frac{1}{2} \cdot 4!$ unterschiedliche Kontraktionen zu diesem Diagramm $\Rightarrow$ Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$
 $\Rightarrow$ Ist ein Vertex durch n Linien mit sich selbst verbunden, so ist der Beitrag zum Symmetriefaktor S gleich $\frac{1}{2^n}$. Unserem Diagramm 1



entsprechen also $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$ Kontraktionen. Ihre Summe ist

$$D_1 = 2(4!)^2 K_1 \stackrel{(254)}{=} -\lambda^2 \frac{i}{(k_1 + k_2 - p_4)^2 - m^2 + i\delta} \quad (255)$$

Andere zusammenhängende Diagramme sind:

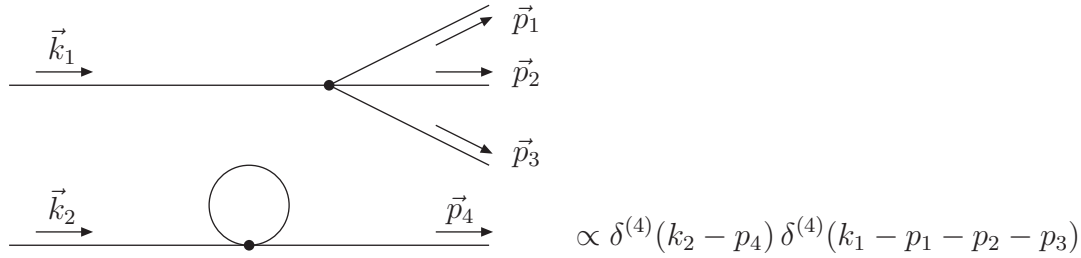


wobei sich $D_1, \dots, D_4$ bzw. $D_5, \dots, D_{10}$ untereinander nur durch die Permutationen von $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_4$ unterscheiden

$$\begin{aligned}
D_5 &= -\lambda^2 \frac{i}{(k_1 - p_1 - p_2)^2 - m^2 + i\delta} \\
D_6 &= -\lambda^2 \frac{i}{(k_1 - p_1 - p_3)^2 - m^2 + i\delta} \\
&\vdots \quad \text{usw.}
\end{aligned} \tag{256}$$

Was ist mit unzusammenhängenden Graphen?

Beispiel:



Dieser Graph ergibt 0, denn

$$\delta^{(4)}(k_1 - p_1 - p_2 - p_3) = \delta(E_{k_1} - E_{p_1} - E_{p_2} - E_{p_3}) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3)$$

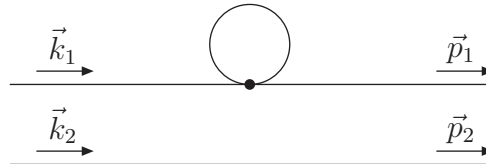
und im Ruhesystem des Teilchens mit Impuls k_1 finden wir:

$$\begin{aligned}
E_{k_1} &= m, & E_{p_i} &= \sqrt{m^2 + \vec{p}_i^2} \geq m \\
\Rightarrow E_{k_1} - E_{p_1} - E_{p_2} - E_{p_3} &\leq -2m < 0 \\
\Rightarrow \delta(E_{k_1} - E_{p_1} - E_{p_2} - E_{p_3}) &= 0
\end{aligned} \tag{257}$$

Physikalisch beschreibt das Diagramm Teilchen, die sich verfehlen. Der Zerfall $\longrightarrow \leftarrow$ ist wegen (257) **kinematisch verboten**. Damit können wir aus (255),(256) unser Endergebnis kompakt zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha}^{(2)} &= -\lambda^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - k_1 - k_2) \\
&\cdot \left\{ \sum_{j=1}^4 \frac{i}{(k_1 + k_2 - p_j)^2 - m^2 + i\delta} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 \frac{i}{(k_1 - p_i - p_j)^2 - m^2 + i\delta} \right\}
\end{aligned} \tag{258}$$

Für einen $2 \rightarrow 2$ -Streuprozess sind unzusammenhängende Graphen wie



nicht kinematisch verboten. Sie tragen aber nur für $\{k_1, k_2\} = \{p_1, p_2\}$ bei, also für die Vorwärtstreue (bei der sich die Teilchen verfehlen). Wir betrachten ab jetzt nur noch echte Streuprozesse mit $\{k_1, k_2\} \neq \{p_1, p_2\}$, in denen die unzusammenhängenden Graphen wegen $\delta^{(4)}(k_{1,2} - p_{1,2}) = 0$ verschwinden.

Zusammenfassung: Wir fassen die bisher gefundenen Feynman-Regeln für reelle KG-Felder mit $\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{p!}\phi_I^p$ -Wechselwirkung zusammen:

Um

$$\langle p_1, \dots, p_N | S | k_1, \dots, k_M \rangle = \langle p_1, \dots, p_N | \mathbf{T} \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right) | k_1, \dots, k_M \rangle$$

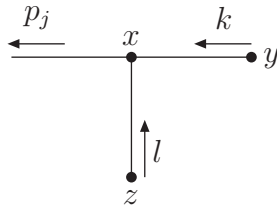
zur Ordnung λ^n zu berechnen, muss man folgende 3 Schritte durcharbeiten:

1. Zeichne alle Feynman-Graphen mit $N + M$ externen Linien und n Vertizes mit jeweils p Linien und kennzeichne alle externen Linien mit einlaufenden $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_M$ und auslaufenden $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$.
2. Ordne jedem Vertex einen Raumzeitpunkt x , einen Term $-i\lambda \int d^4x$ und
 - jeder internen Linie zwischen Vertizes x und y einen Propagator $\bullet \xrightarrow{x \quad y} \bullet D_F(x - y)$ zu und
 - jeder mit Vertex x verbundenen, externen Linie einen Faktor $\exp(ip_j x)$ bzw. $\exp(-ik_j x)$ mit $p_j^0 = E_{p_j}, k_j^0 = E_{k_j}$ zu.
3. Multipliziere jedes Diagramm mit seinem Symmetriefaktor.

Dies sind die „**Ortsraum-Feynman-Regeln**“.

Einfacher: Impulsraum-Feynman-Regeln

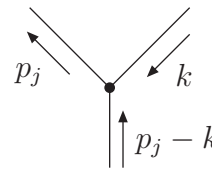
Vertex:



x-abhängige Terme:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \exp(ip_j x) D_F(x - y) D_F(x - z) \\
 \stackrel{(253)}{=} & \int d^4x \exp(ip_j x) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{D}_F(k) \exp(-ikx) \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \tilde{D}_F(l) \exp(-ilx) \\
 = & \int \frac{d^4k d^4l}{(2\pi)^8} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + l - p_j) \tilde{D}_F(k) \tilde{D}_F(l) \quad \text{und mit } \tilde{D}_F(k) \stackrel{(253)}{=} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\delta} \\
 = & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\delta} \frac{i}{(k - p_j)^2 - m^2 + i\delta} \tag{259}
 \end{aligned}$$

D.h. die Feynman-Regel für unseren Vertex x und die anhängenden Propagatoren lautet:



$$-i\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{D}_F(k) \tilde{D}_F(p_j - k)$$

Die Impulse k und $l = p_j - k$ heißen **innere Impulse**.

Damit finden wir die „**Impulsraum-Feynman-Regeln**“:

1. Wie bei den Ortsraum-Feynman-Regeln
2. Ordne jedem Diagramm einen Impulsfluss zu mit Impulserhaltung an jedem Vertex. Ordne
 - jedem Vertex einen Faktor $-i\lambda$ und
 - jeder internen Linie $\bullet \xrightarrow{\vec{q}} \bullet$ einen Propagator

$$\tilde{D}_F(q) = \frac{i}{q^2 - m^2 + i\delta}$$

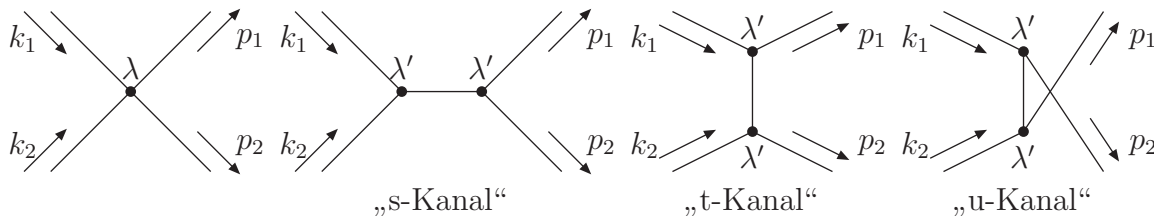
zu. Integriere mit $\int \frac{d^4k_j}{(2\pi)^4}$ über die verbleibenden inneren Impulse.

3. Wie bei Ortsraum-Feynman-Regeln

In unserem Beispielsprozess $S_{\beta\alpha}^{(2)}$ gibt es keine verbleibenden inneren Impulse, über die integriert werden müsste. Die Feynman-Regeln gelten auch, wenn mehrere Wechselwirkungen vorliegen, z.B. beim Higgs-Boson:

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(x) - \frac{\lambda'}{3!} \phi_I^3(x)$$

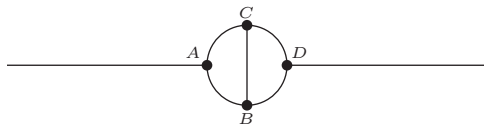
$2 \rightarrow 2$ -Prozess in Ordnung λ^1, λ'^2 :



5.1.3 Nützliches aus der Graphentheorie:

Definition: Ein Weg über einen Graphen, der an seinen Ausgangspunkt zurückführt und dabei keine Linie in beiden Richtungen durchläuft, heißt **Schleife** oder **Loop**.

Beispiel:

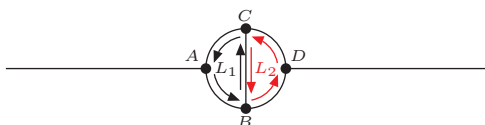


$$L_1 = ABCA$$

(Auf den Anfangspunkt kommt es nicht an.)

Der Weg ABA ist kein Loop. $(-L_j)$ ist die Schleife mit zu L_j umgekehrter Orientierung. Haben zwei Schleifen L_1, L_2 mindestens einen Vertex gemeinsam, so kann man die Verkettung $L_3 = L_1 \circ L_2$ dadurch definieren, dass L_3 alle Vertizes und Linien von $L_1 \cup L_2$ umfasst, außer denjenigen Linien, die von L_1 und L_2 in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Analog definiert man die Verkettung mehrerer Schleifen.

Beispiel:



$$L_2 = BDCB, L_1 \cup L_2 = ABDCA$$

Ist für ein Diagramm $D \{L_1, \dots, L_k\}$ die maximale Menge von Schleifen, so dass kein L_j eine Verkettung der übrigen L_i oder $(-L_i)$ ist, so bezeichnet man D als **k -Schleifendiagramm** oder sagt, dass D k Schleifen hat.

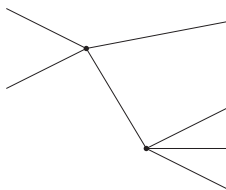
Das Beispiel hat also 2 Schleifen. Diagramme ohne Schleifen heißen **Baumgraphen**.

Euler-Theorem: Die Zahl L der Schleifen eines zusammenhängenden Graphen ergibt sich aus der Zahl N der internen Linien und der Zahl V der Vertizes durch:

$$L = N - V + 1 \quad (260)$$

Beispiele:

1. $N = 1, V = 2, L \stackrel{(260)}{=} 1 - 2 + 1 = 0$ (Baumgraph)



2. $N = 5, V = 4, L \stackrel{(260)}{=} 5 - 4 + 1 = 2$



3. $N = 5, V = 4, L \stackrel{(260)}{=} 5 - 4 + 1 = 2$



Betrachte Feynman-Graphen mit Anzahl V_n von ϕ^n -Vertizes und E externen Linien
 $\Rightarrow$ Jeder ϕ^n -Vertex hat n -Linien und jede interne Linie gehört zu zwei Vertizes

$$\Rightarrow N = \frac{\sum_n n \cdot V_n - E}{2} \quad (261)$$

Mit obigen Beispielen:

1. $V_4 = 2, E = 6, N \stackrel{(261)}{=} \frac{4 \cdot 2 - 6}{2} = 1$
2. $V_3 = 4, E = 2, N \stackrel{(261)}{=} \frac{3 \cdot 4 - 2}{2} = 5$
3. $V_3 = 3, V_4 = 1, E = 3, N \stackrel{(261)}{=} \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 3}{2} = 5$

Einsetzen von (261) in (260) liefert:

$$L = \frac{\sum_n n \cdot V_n - E}{2} - \sum_n V_n + 1 = \sum_n \left(\frac{n}{2} - 1 \right) V_n - \frac{E}{2} + 1 \quad (262)$$

Für unsere Beispiele:

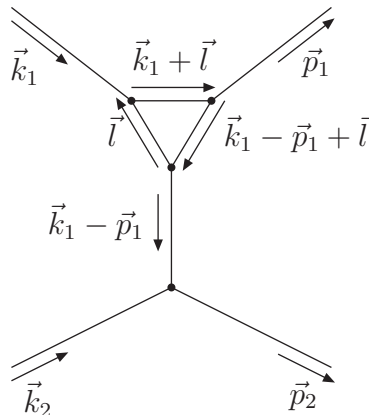
1. $L \stackrel{(262)}{=} 1 \cdot 2 - \frac{6}{2} + 1 = 0$
2. $L \stackrel{(262)}{=} \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{2}{2} + 1 = 2$
3. $L \stackrel{(262)}{=} \frac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot 1 - \frac{3}{2} + 1 = 2$

An (262) erkennt man: höhere Ordnungen λ^n der Störungstheorie entsprechen einer größeren Zahl von Loops. Für z.B. einen $2 \rightarrow 4$ -Prozess in einer ϕ^4 -Theorie ist $L = V_4 - 2$. Wegen $L \geq 0$ ist also λ^2 die niedrigste Ordnung Störungstheorie und λ^{2+n} entspricht n -Schleifendiagrammen. Impulsraum-Feynmanregeln: Von N inneren Impulsen lassen sich V durch die Impulserhaltung an den Vertizes eliminieren. Wegen der Gesamtimpulserhaltung ist eine der V Relationen redundant.

Mit (260) findet man: Es verbleiben Integrationen über $N - (V - 1) \stackrel{(260)}{=} L$ innere Impulse, die man **Schleifen-** oder **Loop-Impulse** nennt.

Beispiel:

Einschleifen-Vertex-Korrektur in $2 \rightarrow 2$ -Streuung in einer ϕ^3 -Theorie.

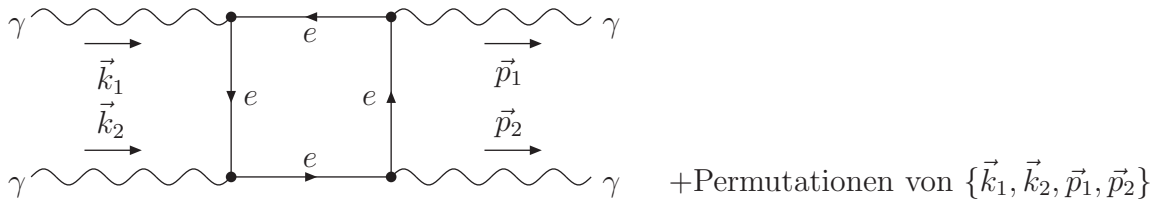


$$D_V = (-i\lambda^4) \frac{i}{(k_1 - p_1)^2 - m^2 + i\delta} \cdot \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i}{l^2 - m^2 + i\delta} \frac{i}{(k_1 - p_1 + l)^2 - m^2 + i\delta} \frac{i}{(k_1 + l)^2 - m^2 + i\delta} \quad (263)$$

Die Lösung aller Einschleifen-Integrale ist bekannt. Bei Zwei- und Mehrschleifen-Integralen kennt man nur Lösungen für Fälle mit wenigen kinematischen Variablen ($k_1 \cdot p_1, k_1 \cdot k_2, \dots$) bzw. Massen. Die Ordnung Störungstheorie mit $L = 0$ nennt man **Born'sche Näherung**. Beiträge mit $L \geq 1$ nennt man **Strahlungskorrekturen**.

Es gibt auch Prozesse, die schon in niedrigster nichtverschwindender Ordnung $L \geq 1$ Schleifen haben.

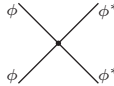
Beispiel: Licht-Licht-Streuung



5.1.4 Komplexes KG-Feld:

(Teilchen $\neq$ Antiteilchen!)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2$$

Hier steht kein $4!$, denn die Symmetriegruppe von $\phi\phi\phi^*\phi^* =$  ist $S_2 \times S_2$, mit nur $2! \cdot 2! = 4$ Elementen.

Propagator

$$\begin{aligned} \vec{y} \longleftarrow \vec{x} \quad D_F(x - y) &= D_F(y - x) = \langle 0 | \mathbf{T} \phi(y) \phi^*(x) | 0 \rangle = \phi(\vec{y}) \phi^*(\vec{x}) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \exp(-ikx) \frac{i}{k^2 - m^2 + i\delta} \end{aligned} \quad (264)$$

Für $y^0 > x^0$: Teilchen werden bei $\vec{x}$ erzeugt und bei $\vec{y}$ vernichtet.

Für $x^0 > y^0$: Antiteilchen werden bei $\vec{y}$ erzeugt und bei $\vec{x}$ vernichtet.

Feynman-Regeln: Unterschiede zum reellen Klein-Gordon-Feld:

1. Linien haben einen Pfeil, dessen Orientierung den Fluss der erhaltenen Ladung aus der U(1)-Symmetrie angibt. Jede Wick-Kontraktion umfasst genau ein ϕ und ϕ^*
2. Als Folge von 1) ändern sich die Symmetriefaktoren, denn die Symmetrieoperation muss jetzt auch die Orientierung erhalten.

Beispiel:

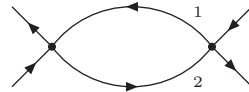
- Reelles Klein-Gordon-Feld:

Symmetrie-Operation $1 \leftrightarrow 2$ lässt Graph invariant $\Rightarrow S = 1/2$.

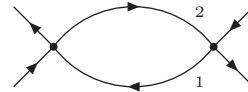


- Komplexes Klein-Gordon-Feld:

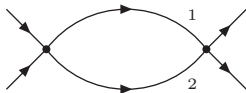
keine Invarianz $\Rightarrow S = 1$



$1 \leftrightarrow 2$



aber hat $S = 1/2$



$$\dots \underbrace{\phi^{*2}(x)} \overbrace{\phi^2(x) \phi^{*2}(y)} \underbrace{\phi^2(y)} \dots$$

5.2 Feynman Regeln für Dirac-Felder:

$$\begin{aligned} \text{Propagator: } [S_F(x-y)]_{\alpha\beta} &= \langle 0 | \mathbf{T} \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle =: \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp(-ip(x-y)) [\tilde{S}_F(p)]_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (265)$$

$$[\tilde{S}_F(p)]_{\alpha\beta} = \frac{i(\not{p} + m\delta_{\alpha\beta})}{p^2 - m^2 + i\delta}, \quad (266)$$

und Spinorindex $\alpha, \beta \in \{1 \dots 4\}$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\vec{p}} \\ \bullet \xleftarrow{\quad} \bullet \\ y, \beta \quad x, \alpha \quad \text{bzw.} \quad \beta \quad \alpha \end{array}$$

Der Propagator $[S_F(x-y)]_{\alpha\beta}$ transportiert eine U(1)-Quantenzahl, die Fermionzahl und die in α und β enthaltene Information über Spin (und Teilchen-/Antiteilchencharakter) von y nach x .

Erinnerung: $\mathbf{T} [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)] = \theta(x^0 - y^0) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x)$

Die zu (245) analoge Formel ist:

$$\mathbf{T} [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)] = : \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) : + \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \quad (267)$$

mit

$$\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) = [S_F(x-y)]_{\alpha\beta} = \begin{cases} \{\psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y)\} & \text{für } x^0 > y^0 \\ -\{\bar{\psi}_\beta^+(y), \psi_\alpha^-(x)\} & \text{für } x^0 < y^0 \end{cases} \quad (268)$$

und

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^+(x) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s u_\alpha^s(\vec{p}) a_p^s \exp(-ipx) \Big|_{p^0=E_p} && \text{vernichtet Fermion} \\ \psi_\alpha^-(x) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s v_\alpha^s(\vec{p}) b_p^{s\dagger} \exp(ipx) \Big|_{p^0=E_p} && \text{erzeugt Antifermion} \\ \bar{\psi}_\beta^+(y) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \bar{v}_\beta^s(\vec{p}) b_p^s \exp(-ipy) \Big|_{p^0=E_p} && \text{vernichtet Antifermion} \\ \bar{\psi}_\beta^-(y) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \bar{u}_\beta^s(\vec{p}) a_p^{s\dagger} \exp(ipy) \Big|_{p^0=E_p} && \text{erzeugt Fermion} \end{aligned} \quad (269)$$

so dass (vgl. (176))

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) \quad (270a)$$

$$\bar{\psi}(y) = \bar{\psi}^+(y) + \bar{\psi}^-(y) \quad (270b)$$

Ein-Teilchen-Zustände:

$$|\vec{p} s\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^{s\dagger} |0\rangle \quad \text{Fermion} \quad (271a)$$

$$|\vec{p} \bar{s}\rangle = \sqrt{2E_p} b_p^{s\dagger} |0\rangle \quad \text{Antifermion} \quad (271b)$$

Vielteilchenzustände:

$$|\vec{p}_1 s_1 \dots \vec{p}_n s_n\rangle = \prod_{j=1}^n \sqrt{2E_{p_j}} a_{p_j}^{s_1\dagger} |0\rangle \quad (272)$$

Aus (269) und (272) findet man die Feynman-Regel für die Kontraktion mit Zuständen:

$$\psi_{\alpha}^{+}(x) \underline{|\vec{p}s\rangle} = u_{\alpha}^s(\vec{p}) \exp(-ipx) |0\rangle \quad (273)$$

entsprechend zu (273)

$$\underline{\langle \vec{p}s | \bar{\psi}_{\beta}(y)} = \bar{u}_{\beta}^s(\vec{p}) \exp(ipy) \langle 0 |$$

Und für Vielteilchenzustände

$$\psi_{\alpha}(x) \underline{|\vec{p}_1 s_1 \dots \vec{p}_j s_j \dots \vec{p}_n s_n\rangle} = u_{\alpha}^{s_j}(\vec{p}_j) \exp(-ip_j x) |\vec{p}_1 s_1 \dots \widehat{\vec{p}_j s_j} \dots \vec{p}_n s_n\rangle \quad (274)$$

Speziell für 2 Fermion-Zustand:

$$|\vec{p}_1 s_1, \vec{p}_2 s_2\rangle = \sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{p_2}} a_{p_1}^{s_1 \dagger} a_{p_2}^{s_2 \dagger} |0\rangle \quad (275)$$

(beachte gleiche Reihenfolge)

Fermion-Antifermion-Zustand:

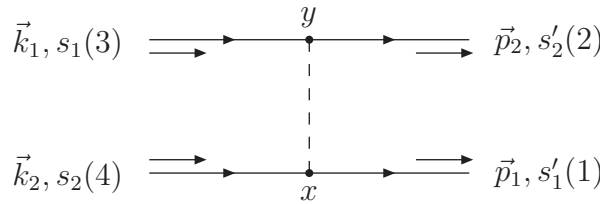
$$\begin{aligned} |\vec{p}_1 s_1, \vec{p}_2 s_2\rangle &:= \sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{p_2}} b_{p_1}^{s_1 \dagger} a_{p_2}^{s_2 \dagger} |0\rangle \\ \text{und } \langle \vec{p}_1 s_1, \vec{p}_2 s_2 | &:= |\vec{p}_1 s_1, \vec{p}_2 s_2\rangle^{\dagger} \\ &= \langle 0 | a_{p_2}^{s_2} b_{p_1}^{s_1} \sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{p_2}} \end{aligned} \quad (276)$$

(anders definiert als in [Peskin, 4.118])

Das globale Vorzeichen einer Wick-Kontraktion

$$\langle \underline{\vec{p}_1 s'_1 \vec{p}_2 s'_2} | \mathbf{T} \overline{\phi \bar{\psi} \psi(x) \phi \bar{\psi} \psi(y)} | \underline{\vec{k}_1 s_1 \vec{k}_2 s_2} \rangle \propto \langle 0 | \mathbf{T} \overline{a_{p_1}^{s'_1} a_{p_2}^{s'_2} \phi \bar{\psi} \psi(x) \phi \bar{\psi} \psi(y) a_{k_1}^{s_1 \dagger} a_{k_2}^{s_2 \dagger}} | 0 \rangle \quad (277)$$

Graphisch:



ist durch die Zahl der Permutationen gegeben, um die kontrahierten Operatoren in eine Standardreihenfolge ($\psi\bar{\psi}$) zu bringen:

$$\underbrace{\mathbf{T} a_{p_1}^{s'_1} \bar{\psi} \psi(x) a_{k_2}^{s_2 \dagger}}_{\text{untere}} \underbrace{a_{p_2}^{s'_2} \bar{\psi} \psi(y) a_{k_1}^{s_1 \dagger}}_{\text{obere}} \quad (278)$$

Fermionlinie

Ist die Fermionlinie nicht geschlossen, so kommt es auf die inneren Vertizes $\bar{\psi}\psi(x)$, $\bar{\psi}\psi(y)$ nicht an, denn z.B.

$$\mathbf{T} \overrightarrow{a_{p_2}^{s'_2} \bar{\psi} \psi(x)} = + \mathbf{T} \bar{\psi} \psi(x) a_{p_2}^{s'_2}$$

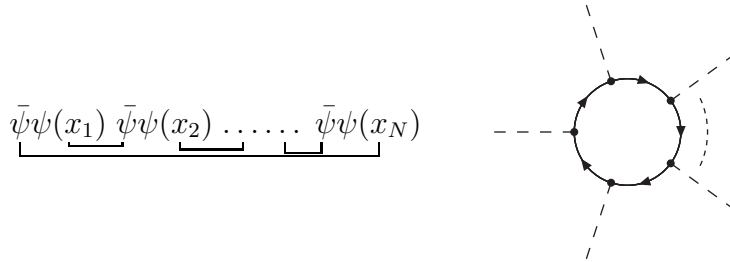
D.h. wir können anstelle von (278) einfach

$$\underbrace{a_{p_1}^{s'_1} a_{k_2}^{s_2^\dagger}} \underbrace{a_{p_2}^{s'_2} a_{k_1}^{s_1^\dagger}}$$

betrachten. Es ist eine gerade Permutation der ursprünglichen Reihenfolge in (277):

$$a_{p_1}^{s'_1} a_{p_2}^{s'_2} a_{k_1}^{s_1^\dagger} a_{k_2}^{s_2^\dagger}$$

d.h. das Vorzeichen ist +1. Weiter führen die Antivertauschungsrelationen zu Minuszeichen z.B. in *Schleifen* aus WW-Vertizes.



Die Felder der letzten Wick-Kontraktion stehen in der falschen Reihenfolge. (Man muss an $2N - 1$ Feldern vorbeitauschen.)

$\bar{\psi}_\beta(x)\psi_\alpha(y) = -\psi_\alpha(y)\bar{\psi}_\beta(x) \Rightarrow$ Faktor -1 für jede Fermion-Schleife.

Man kann das Vorzeichen eines Feynman-Diagramms direkt ablesen:

1. Nummerierung der Fermionen wie in der Amplitude:

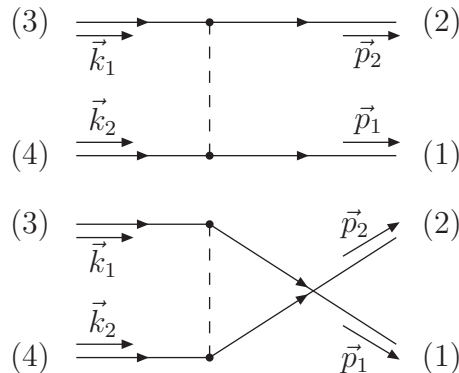
$$\langle \vec{p}_1 s'_1, \vec{p}_2 s'_2 \mid \dots \mid \vec{k}_1 s_1, \vec{k}_2 s_2 \rangle$$

Hinschreiben in der Reihenfolge, wie Fermionen kontrahiert sind, dabei *entgegen* der Fermionlinie lesen.

In unserem Beispiel: 23 14 (oder 14 23): gerade Permutation $\Rightarrow$ Faktor $+1$ „Vorzeichen der Fermionkontraktion“

2. Faktor -1 für jede Fermion-Schleife

Beispiel zu 1.)



liefert Faktor $\text{sgn}(1423) = +1$ bzw. $\text{sgn}(1324) = -1$

$\Rightarrow$ „Relatives Minuszeichen für gekreuzte Fermionlinien“

(geht via $1 \leftrightarrow 2$ aus anderem Diagramm hervor)

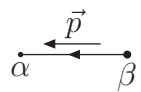
Da physikalische Observablen proportional zu $\left| \langle \vec{p}_1 s'_1, \vec{p}_2 s'_2 | \mathbf{S} | \vec{k}_1 s_1, \vec{k}_2 s_2 \rangle \right|^2$ sind, kommt es nur auf das relative Vorzeichen an.

5.2.1 Feynmanregeln für Dirac-Fermionen mit Yukawa-Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_I = -y \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x)$$

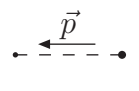
mit der Yukawa-Kopplung y und einem reellen KG-Feld ϕ (z.B. Higgsfeld), Fermionmasse m , Bosonmasse M

- Fermion-Propagator:



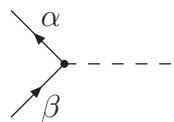
$$\frac{i [\not{p} + m]_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\delta}$$

- Skalarer Propagator:



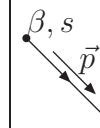
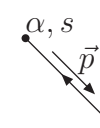
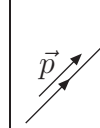
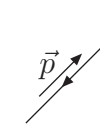
$$\frac{i}{p^2 - M^2 + i\delta}$$

- Fermion-Boson Vertex:



$$-iy\delta_{\alpha\beta}$$

- Externe Fermionen:

	Fermion	Antifermion
einlaufendes	 $u_{\beta}^s(\vec{p})$	 $\bar{v}_{\alpha}^s(\vec{p})$
auslaufendes	 $\bar{u}_{\alpha}^s(\vec{p})$	 $v_{\beta}^s(\vec{p})$

- Externe skalare Bosonen:

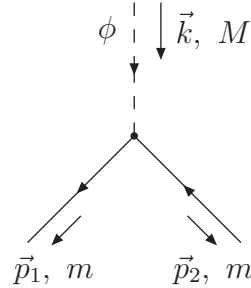


$$\text{Faktor: } +1$$

- Faktor -1 für Fermionschleife
- Globaler Vorfaktor -1 abhängig von Kontraktion der externen Fermionen
- Symmetriefaktor
 Baumgraphen: immer $= 1$ in allen Theorien
 1-Loop: immer $= 1$ in Yukawa-Theorie

5.3 Zerfallsrate und Streuquerschnitt

Ein massives Teilchen, das an hinreichend leichte Teilchen koppelt, ist instabil und kann zerfallen:



Für $M > 2m$ ist der Zerfall kinematisch erlaubt.

Erweiterung des Konzepts der asymptotischen Zustände auf instabile Teilchen:

$$|\vec{k}, t\rangle_{in} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} |\vec{k}\rangle \in \mathcal{F}$$

macht keinen Sinn, weil ein instabiles Teilchen nur eine endliche Zeit lebt. Jedoch war wegen der Lorentzinvarianz ohnehin

$$|\vec{k}\rangle_{in} = |\vec{k}\rangle_{out} = |\vec{k}\rangle \in \mathcal{F}$$

D.h. ein Zustand mit *einem* instabilen Teilchen ist einfach durch $|\vec{k}\rangle_{in} = |\vec{k}\rangle \in \mathcal{F}$ gegeben. Man definiert:

$$\mathbf{S} = \mathbf{1} + i \mathbf{T}$$

(mit der $\mathbf{T}$ -Matrix für „transition“) und nutzt die Impulserhaltung aus

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N | \mathbf{T} | \vec{p}_A \rangle =: (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\vec{p}_A - \vec{p}_1 - \dots - \vec{p}_N) \mathcal{M}_{A \rightarrow B_1 \dots B_N}(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_N) \quad (279)$$

$\mathcal{M}_{A \rightarrow B_1 \dots B_N}$ heißt **Matrixelement** zum Prozess $A \rightarrow B_1 \dots B_N$

Zerfallsrate:

$$\Gamma(A \rightarrow B_1 \dots B_N) := \text{Zahl der Zerfälle pro Zeiteinheit des Teilchens } A \text{ in den Endzustand } f = \{B_1 \dots B_N\}$$

(Γ ist zeitunabhängig wegen Poincaré-Invarianz)

Totale Zerfallsrate

$$\Gamma_{tot} = \sum_f \Gamma(A \rightarrow f)$$

wobei über *alle* erlaubten Endzustände summiert wird.

Beispiel:

$A = Z\text{-Boson}, f = e\bar{e}, \mu\bar{\mu}, \dots, b\bar{b}, e\bar{e}\gamma, \dots$

$N(t)$ = Zahl der instabilen Teilchen zur Zeit t

$$N(t) = N(0) \exp(-\Gamma_{tot} t), \quad \tau = \frac{1}{\Gamma_{tot}} \text{ heißt } \mathbf{Lebensdauer} \text{ von } A$$

Differentielle Zerfallsrate für Impulse der B_i im Volumenelement $d^3\vec{p}_1, \dots, d^3\vec{p}_N$ um $(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_A} \left(\prod_f \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}_{A \rightarrow B_1 \dots B_N}(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_N)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\vec{p}_A - \sum_{i=1}^N \vec{p}_i) \quad (280)$$

$d\Gamma$ = Wahrscheinlichkeit für den Zerfall $A \rightarrow B_1 \dots B_N$

Der Vorfaktor in (280) ist eine Konsequenz der Normierung in (131):

$$\langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p})$$

(280) ist die übliche Wahrscheinlichkeitsinterpretation von QM Amplituden

$$\prod_f \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} =: \quad d \text{ LIPS heißt differentielles Lorentzinvariantes Phasenraumelement}$$

„Lorentz-invariant phase space“ (Phasenraum = Impulsraum $\mathbb{R}^3$)

$$\Gamma(A \rightarrow B_1 \dots B_N) = \int \dots \int d\Gamma \frac{1}{n_1!} \dots \frac{1}{n_l!} \quad (281)$$

wenn es jeweils $n_1 \dots n_l$ identische Teilchen unter den $B_1 \dots B_n$ gibt.

Beispiel: $Z \rightarrow e^- e^- e^+ e^+$: $n_1 = 2, n_2 = 2$

Begründung:

$a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |0\rangle = |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle$ ist derselbe Zustand wie $|\vec{p}_2, \vec{p}_1\rangle$

Gleichung (280) und (281) beziehen sich auf den Fall, dass die Spins der (Anti-)Fermionen im Endzustand festgelegt sind. In der Praxis interessiert man sich meist für den Fall, dass die Spins nicht gemessen werden, d.h. es ist über alle Spin-Einstellungen zu summieren. Ebenso ist in der Regel der Spin eines zerfallenden (Anti-)Fermions oder Spin-1-Bosons unbekannt, und die gemessene Zerfallsrate impliziert eine Mittelung über die Spin-Einstellungen des Anfangszustands. D.h. beim Zerfall eines Skalars in Fermionen und Antifermionen misst man:

$$\bar{\Gamma}(A \rightarrow B_1 \dots B_N) := \sum_{s_1=-1/2}^{1/2} \dots \sum_{s_N=-1/2}^{1/2} \Gamma(A \rightarrow B_1 \dots B_N) \quad (282)$$

Insbesondere ist die totale Zerfallsrate als $\bar{\Gamma}_{tot}$ zu lesen.

5.3.1 Feynman-Regeln für massive Vektorbosonen

$$\left. \begin{matrix} u^\alpha(x) \\ \tilde{u}^\alpha(k) \end{matrix} \right\} \text{ Proca-Feld im } \left\{ \begin{matrix} \text{Ortsraum} \\ \text{Impulsraum} \end{matrix} \right.$$

Proca-Gleichung (beschreibt freies, massives Spin-1-Teilchen) (74)

$$(74) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} [\square g^{\beta\alpha} - \partial^\beta \partial^\alpha + M^2 g^{\beta\alpha}] u_\alpha(x) = 0 \\ [(k^2 - M^2) g^{\beta\alpha} - k^\beta k^\alpha] \tilde{u}_\alpha(k) = 0 \end{matrix} \right\} \quad (283)$$

Propagator $\tilde{D}^{\alpha\beta}(k)$ ist Green-Funktion zu (283) (vgl. (165) für Skalarfeld).

$$[(k^2 - M^2) g^\beta{}_\alpha - k^\beta k_\alpha] \tilde{D}^{\alpha\beta'}(k) = -i g^{\beta\beta'} \quad (284)$$

Der Ansatz $\tilde{D}^{\alpha\beta'}(k) = iak^\alpha k^{\beta'} + ibg^{\alpha\beta'}$ liefert in (284)

$$\begin{aligned} (k^2 - M^2)(ak^\beta k^{\beta'} + bg^{\beta\beta'}) - ak^2 k^\beta k^{\beta'} - bk^\beta k^{\beta'} &= -g^{\beta\beta'} \\ g^{\beta\beta'}((k^2 - M^2)b + 1) + k^\beta k^{\beta'}((k^2 - M^2)a - ak^2 - b) &= 0 \\ b = -\frac{1}{k^2 - M^2}, \quad -aM^2 - b = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{M^2} \frac{1}{k^2 - M^2} \\ \Rightarrow \tilde{D}^{\alpha\beta'}(k) = -\frac{i}{k^2 - M^2} \left[g^{\alpha\beta'} - \frac{k^\alpha k^{\beta'}}{M^2} \right] \end{aligned} \quad (285)$$

Um das richtige Vorzeichen zu bestimmen, muss man $\langle 0 | \mathbf{T} u^\alpha(x) u^\beta(y) | 0 \rangle = D^{\alpha\beta}(x - y)$ betrachten.

$$\begin{array}{c} \nearrow \text{~~~~~} \searrow \\ \alpha \qquad \qquad \qquad \beta \end{array} = \frac{i}{k^2 - M^2 + i\delta} \left[g^{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{M^2} \right] \quad (286)$$

Zerlegung nach ebenen Wellen:

$$u_\mu(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r [\epsilon_\mu^{(r)} a_p^{(r)} \exp(-ipx) + \epsilon_\mu^{(r)*} a_p^{(r)\dagger} \exp(ipx)] \Big|_{p^0=E_p} \quad (287a)$$

$$\text{mit } [a_p^{(r)}, a_{p'}^{(s)}] = 0, \quad [a_p^{(r)}, a_{p'}^{(s)\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{rs} \quad (287b)$$

Man erwartet naiv 4 mögliche Polarisationsvektoren $\epsilon_\mu^{(r)}$ für das massive Vektorboson, jedoch ist die Matrix $[g^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta / M^2]$ in (285),(286) singularär wegen

$$\left(g^{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{M^2} \right) k_\beta = 0 \quad (288)$$

für $k^2 = M^2$. Koppelt (286) an einen Strom j_β (z.B. $j_\beta = \bar{\psi} \gamma_\beta \psi$) und zerlegen wir

$$j_\beta = a_0 \epsilon_\beta^{(0)} + a_1 \epsilon_\beta^{(1)} + a_2 \epsilon_\beta^{(2)} + a_3 \epsilon_\beta^{(3)} \quad (289)$$

mit $\epsilon_\beta^{(0)} \propto k_\beta$, so ist $\tilde{D}^{\alpha\beta} \epsilon_\beta^{(0)} \stackrel{(286)}{=} a^\alpha \begin{array}{c} \nearrow \text{~~~~~} \searrow \\ \alpha \qquad \qquad \qquad \beta \end{array}$
und die a_0 -Komponente trägt nicht zur Amplitude bei.

Klassische Physik:

Die Lösung von

$$[(k^2 - M^2) g^{\beta\alpha} - k^\beta k^\alpha] u_\alpha^{inh}(x) = j^\beta(x)$$

ist

$$u_\alpha^{inh} = \int i D_\alpha{}^\beta(x - y) j_\beta(y) d^4y$$

und die a_0 -Komponente von $j^\beta(y)$ trägt nicht bei wegen (288).

$\Rightarrow$ Das massive Vektorfeld hat (wie aus der Darstellungstheorie der $SO(3)$ erwartet) nur drei physikalische Komponenten.

- externe Bosonlinien (folgt aus (287a))

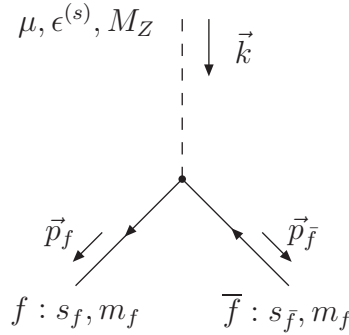
$$\begin{array}{ll}
 \text{einlaufend} & \begin{array}{c} \text{Diagram: A wavy line with an arrow pointing up-right, labeled } \mu \text{ at the bottom-left and } p \text{ at the top-right.} \end{array} & \epsilon_\mu(p) \\
 & & (295) \\
 \text{auslaufend} & \begin{array}{c} \text{Diagram: A wavy line with an arrow pointing up-right, labeled } \mu \text{ at the top-right and } p \text{ at the bottom-left.} \end{array} & \epsilon_\mu^*(p)
 \end{array}$$

⇒ Mit diesen Feynman-Regeln können wir nun auch W- und Z-Bosonen behandeln:

W-Bosonen sind komplexe Felder mit $(W^{-\mu})^\dagger = W^{+\mu}$. Die Feynman-Regeln für ein komplexes

Vektorfeld sind identisch, die W^- - Linie hat jedoch einen Pfeil. $\overset{\bullet}{\text{---}} \rightarrow \overset{\bullet}{\text{---}}$ $\alpha \quad \beta$

5.3.2 Z-Zerfall in Fermion-Antifermion-Paar



Ist kinematisch durch $\delta^{(4)}(k - p_f - p_{\bar{f}})$ festgelegt.

$k = \begin{pmatrix} M_Z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_f + E_{\bar{f}} = M_Z$, $\vec{k}_f = -\vec{k}_{\bar{f}} \Rightarrow E_f = E_{\bar{f}} = \frac{M_Z}{2}$ und $|\vec{p}_f|^2 = |\vec{p}_{\bar{f}}|^2 = E_f^2 - m_f^2$

$$\mathcal{M} = g_V \mathcal{M}_V + g_A \mathcal{M}_A$$

Vektor-Anteil:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_V &= i\epsilon_\mu^{(s)}(k) \bar{u}(p_f, s_f) \gamma^\mu v(p_{\bar{f}}, s_{\bar{f}}) \\
 \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} |\mathcal{M}_V|^2 &= \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} \mathcal{M}_V^* \mathcal{M}_V, \quad \mathcal{M}_V^* = -i\epsilon_\nu^{(s)*}(k) v^\dagger(p_{\bar{f}}, s_{\bar{f}}) \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 u(p_f, s_f) \\
 &= \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} \epsilon_\mu^{(s)}(k) \epsilon_\nu^{(s)*}(k) \bar{v}(p_{\bar{f}}, s_{\bar{f}}) \gamma^\nu u(p_f, s_f) \bar{u}(p_f, s_f) \gamma^\mu v(p_{\bar{f}}, s_{\bar{f}}) \quad (296)
 \end{aligned}$$

Polarisationssumme für Fermionen:

$$\sum_{s_f} u(p_f, s_f) \bar{u}(p_f, s_f) = \not{p}_f + m \quad (297a)$$

$$\sum_{s_{\bar{f}}} v(p_{\bar{f}}, s_{\bar{f}}) \bar{v}(p_{\bar{f}}, s_{\bar{f}}) = \not{p}_{\bar{f}} - m \quad (297b)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} |\mathcal{M}_V|^2 &= \epsilon_\mu^{(s)}(k) \epsilon_\nu^{(s)*}(k) \text{tr} \left[\gamma^\nu (\not{p}_f + m) \gamma^\mu (\not{p}_{\bar{f}} - m) \right] \\
&= 4\epsilon_\mu^{(s)}(k) \epsilon_\nu^{(s)*}(k) \left[p_f^\mu p_{\bar{f}}^\nu + p_f^\nu p_{\bar{f}}^\mu - g^{\mu\nu} (p_f p_{\bar{f}} + m^2) \right] \quad (298)
\end{aligned}$$

Für die totale Zerfallsrate mittlen wir über alle 3 Polarisationen des Z-Bosons

$$\sum_{s_f, s_{\bar{f}}} \overline{|\mathcal{M}_V|^2} := \frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} |\mathcal{M}_V|^2$$

Alle 3 Polarisationen tragen dasselbe zu $\bar{\Gamma}_{tot}$ bei, weil im Ruhesystem des Z-Bosons keine z-Richtung ausgezeichnet ist und die Definitionen „transversal“ und „longitudinal“ keinen Sinn macht.

Polarisationssumme (291):

$$\sum_{s=1}^3 \epsilon_\mu^{(s)*} \epsilon_\nu^{(s)} = \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} - g_{\mu\nu}$$

Damit folgt aus (298) (mit $\epsilon_\mu^{(s)} \epsilon_\nu^{(s)*} g^{\mu\nu} \stackrel{(290)}{=} -1$)

$$\sum_{s_f, s_{\bar{f}}} \overline{|\mathcal{M}_V|^2} = \frac{1}{3} \left[8 \frac{(p_f k)(p_{\bar{f}} k)}{M_Z^2} - 8 p_f p_{\bar{f}} \right] + 4(p_f p_{\bar{f}} + m^2) = \frac{8}{3} \frac{(p_f k)(p_{\bar{f}} k)}{M_Z^2} + \frac{4}{3} p_f p_{\bar{f}} + 4m^2 \quad (299)$$

Alle Skalarprodukte in (299) lassen sich durch Massen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
2(p_f p_{\bar{f}}) &= \underbrace{(p_f + p_{\bar{f}})^2}_{k^2=M_Z^2} - \underbrace{p_f^2}_{m^2} - \underbrace{p_{\bar{f}}^2}_{m^2} = M_Z^2 - 2m^2 \\
2(p_f k) &= p_f^2 + k^2 - \underbrace{(k - p_f)^2}_{p_{\bar{f}}^2} = M_Z^2
\end{aligned}$$

$$(299) : \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} \overline{|\mathcal{M}_V|^2} = \frac{2}{3} M_Z^2 + \frac{2}{3} (M_Z^2 - 2m^2) + 4m^2 = \frac{4}{3} M_Z^2 + \frac{8}{3} m^2 = \frac{4}{3} (M_Z^2 + 2m^2) \quad (300)$$

$\Rightarrow$ keine Richtungsabhängigkeit, isotrop

Analog zu $\mathcal{M}_V$ in (298) findet man für $\mathcal{M}_A$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} |\mathcal{M}_A|^2 &= \epsilon_\mu^{(s)}(k) \epsilon_\nu^{(s)*}(k) \text{tr} \left[\gamma^\nu \gamma_5 (\not{p}_f + m) \gamma^\mu \gamma_5 (\not{p}_{\bar{f}} - m) \right] \\
&= 4\epsilon_\mu^{(s)}(k) \epsilon_\nu^{(s)*}(k) \left[p_f^\mu p_{\bar{f}}^\nu + p_f^\nu p_{\bar{f}}^\mu - g^{\mu\nu} (p_f p_{\bar{f}} - m^2) \right] \\
\Rightarrow \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} \overline{|\mathcal{M}_A|^2} &= \frac{8}{3} \frac{(p_f k)(p_{\bar{f}} k)}{M_Z^2} + \frac{4}{3} p_f p_{\bar{f}} - 4m^2 = \frac{4}{3} (M_Z^2 - 4m^2)
\end{aligned}$$

Der Interferenzterm zwischen $\mathcal{M}_V$ und $\mathcal{M}_A$ verschwindet, wenn (zur Berechnung von Γ_{tot}) über die Impulse $d^3\vec{p}_f d^3\vec{p}_{\bar{f}}$ integriert wird. Damit wird die Spin-summierte differentielle Zerfallsrate

(siehe (280)) im Ruhesystem ($E_Z = M_Z$) zu:

$$\begin{aligned}
 d\bar{\Gamma} &:= \frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} d\Gamma \\
 &\stackrel{(300)}{=} \frac{1}{2M_Z} \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^6 2E_f 2E_{\bar{f}}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - p_f - p_{\bar{f}}) \frac{4}{3} [M_Z^2(g_V^2 + g_A^2) + 2m^2(g_V^2 - 2g_A^2)] \beta_{01}
 \end{aligned}$$

Die **Totale Zerfallsrate** ist also:

$$\bar{\Gamma} = \frac{M_Z^2(g_V^2 + g_A^2) + 2m^2(g_V^2 - 2g_A^2)}{6\pi^2 M_Z} \underbrace{\int \frac{d^3\vec{p}_f}{2E_f} \frac{d^3\vec{p}_{\bar{f}}}{2E_{\bar{f}}} \delta^{(4)}(k - p_f - p_{\bar{f}})}_{\text{Phasenraumintegral}} \quad (302)$$

Trick für das Phasenraumintegral:

$$\int \frac{d^3\vec{p}_{\bar{f}}}{2E_{\bar{f}}} = \int d^4p_{\bar{f}} \delta(p_{\bar{f}}^2 - m^2) \theta(p_{\bar{f}}^0)$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{d^3\vec{p}_f}{2E_f} \frac{d^3\vec{p}_{\bar{f}}}{2E_{\bar{f}}} \delta^{(4)}(k - p_f - p_{\bar{f}}) = \int \frac{d^3\vec{p}_f}{2E_f} d^4p_{\bar{f}} \delta(p_{\bar{f}}^2 - m^2) \theta(p_{\bar{f}}^0) \delta^{(4)}(k - p_f - p_{\bar{f}}) \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}_f}{2E_f} \delta((k - p_f)^2 - m^2) \theta(k^0 - p_f^0) = \int \frac{d^3\vec{p}_f}{2E_f} \delta(M_Z^2 - 2k \cdot p_f) \theta(k^0 - p_f^0)
 \end{aligned}$$

Lorentzinvariant $\Rightarrow$ Wähle Bezugssystem

$$k = (M_Z \ 0 \ 0 \ 0)^\top \Rightarrow k \cdot p_f = M_Z \sqrt{\vec{p}_f^2 + m^2}$$

$$I = \int \frac{d^3\vec{p}_f}{2E_f} \delta(M_Z^2 - 2M_Z \sqrt{\vec{p}_f^2 + m^2}) \theta(k^0 - p_f^0)$$

Polarkoordinaten $d^3\vec{p}_f = |\vec{p}_f|^2 d|\vec{p}_f| d\varphi d\cos\vartheta$

$$\begin{aligned}
 I &= 4\pi \int_0^\infty \frac{|\vec{p}_f|^2 d|\vec{p}_f|}{2\sqrt{|\vec{p}_f|^2 + m^2}} \delta(M_Z^2 - 2M_Z \sqrt{|\vec{p}_f|^2 + m^2}) \theta\left(M_Z - \sqrt{|\vec{p}_f|^2 + m^2}\right) \\
 &= 2\pi \left[\frac{|\vec{p}_f|^2}{\sqrt{|\vec{p}_f|^2 + m^2}} \left(2M_Z \frac{2|\vec{p}_f|}{2\sqrt{|\vec{p}_f|^2 + m^2}} \right)^{-1} \right] \bigg|_{|\vec{p}_f|=\sqrt{\frac{M_Z^2}{4}-m^2}} \theta\left(\frac{M_Z^2}{4} - m^2\right) \\
 &= \frac{\pi}{2M_Z} \sqrt{M_Z^2 - 4m^2} \theta\left(\frac{M_Z^2}{4} - m^2\right) \quad (303)
 \end{aligned}$$

Einsetzen in (302) (Betrachte $M_Z > 2m$)

$$\bar{\Gamma}(Z \rightarrow f \bar{f}) = \frac{M_Z^2(g_V^2 + g_A^2) + 2m^2(g_V^2 - 2g_A^2)}{12\pi M_Z^2} \sqrt{M_Z^2 - 4m^2} \quad (304)$$

Fermionen, in die das Z zerfallen kann:

Quarks	g_V	g_A
b,s,d	-0,13	0,19
u,c	0,071	-0,19
Leptonen	g_V	g_A
e, μ, τ	-0,014	0,19
ν_e, ν_μ, ν_τ	0,19	-0,19

(305)

Quarks tragen einen inneren Freiheitsgrad, die zugehörige Quantenzahl heißt **Farbe**. Sie gehört zu einer SU(3)-Symmetrie mit fundamentalem Triplet

$$\begin{pmatrix} q_R \\ q_G \\ q_B \end{pmatrix}$$

wobei $q = u, d, c, s, b, t$ ein Quarkflavor ist und R, G, B für „rot“, „grün“ und „blau“ steht.

$\Rightarrow$ Faktor 3 für jedes Quark aus Summe über R, G, B .

Die Zerfallsraten in $\gamma\gamma$, gg sind klein, ebenso wie die in 3-Körper-Endzustände. Alle Fermionenmassen sind vernachlässigbar ($m = 0$). Partielle Zerfallsraten:

$$\Gamma(Z \rightarrow f \bar{f}) = \frac{M_Z}{12\pi}(g_V^2 + g_A^2), \quad M_Z = 91,2 \text{ GeV} \quad (306)$$

Quarks:

$$\Gamma(Z \rightarrow q \bar{q}) = \sum_{j=r,g,b} \Gamma(Z \rightarrow q_j \bar{q}_j) = 3\Gamma(Z \rightarrow q_R \bar{q}_R)$$

$$q = d, s, b \quad : \quad \Gamma(Z \rightarrow q \bar{q}) = \frac{M_Z}{4\pi} \cdot 0,051 = 371 \text{ MeV} \quad (307a)$$

$$q = u, c \quad : \quad \Gamma(Z \rightarrow q \bar{q}) = \frac{M_Z}{4\pi} \cdot 0,040 = 288 \text{ MeV} \quad (307b)$$

Leptonen:

$$l = e, \mu, \tau \quad : \quad \Gamma(Z \rightarrow l^+ l^-) = \frac{M_Z}{12\pi} \cdot 0,035 = 84 \text{ MeV} \quad (308a)$$

$$\nu = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \quad : \quad \Gamma(Z \rightarrow \nu \bar{\nu}) = \frac{M_Z}{12\pi} \cdot 0,069 = 167 \text{ MeV} \quad (308b)$$

Experiment (siehe [PDT, S. 374])

$$\Gamma_{exp}(Z \rightarrow \text{Hadronen}) = 1744 \pm 2 \text{ MeV} \quad (309)$$

(Hadronen := stark wechselwirkende Teilchen)

Vergleich mit Theorie:

$$\sum_{q=u,d,c,s,b} \Gamma(Z \rightarrow q \bar{q}) = (3 \cdot 371 + 2 \cdot 288) \text{ MeV} = 1689 \text{ MeV} \quad (310)$$

$$\Gamma_{exp}(Z \rightarrow e^+e^-) = 83,9 \pm 0,1 \text{ MeV} \quad (311a)$$

$$\Gamma_{exp}(Z \rightarrow \mu^+\mu^-) = 84,0 \pm 0,2 \text{ MeV} \quad (311b)$$

$$\Gamma_{exp}(Z \rightarrow \tau^+\tau^-) = 84,0 \pm 0,2 \text{ MeV} \quad (311c)$$

Die unsichtbare Z-Zerfallsrate stimmt mit (308) überein:

$$\Gamma_{exp}^{inv}(Z) = 499 \pm 1,5 \text{ MeV} \quad (312)$$

Vergleich:

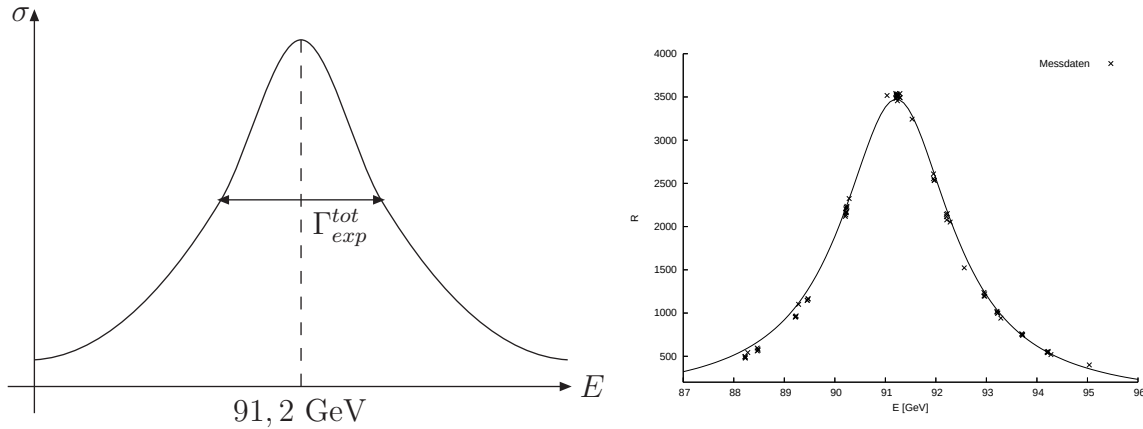
$$\sum_{\nu=\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau} \Gamma(Z \rightarrow \nu \bar{\nu}) = 3 \cdot 167 \text{ MeV} = 501 \text{ MeV} \quad (313)$$

$\Rightarrow$ Direkter Nachweis (am LEP-1 Experiment am CERN), dass es 3 leichte Neutrinos gibt!

Wie misst man es?

$$\Gamma_{exp}^{inv} := \Gamma_{exp}^{tot} - \Gamma_{exp}^{vis}$$

(Γ_{exp}^{vis} = **sichtbare Zerfallsbreite**)



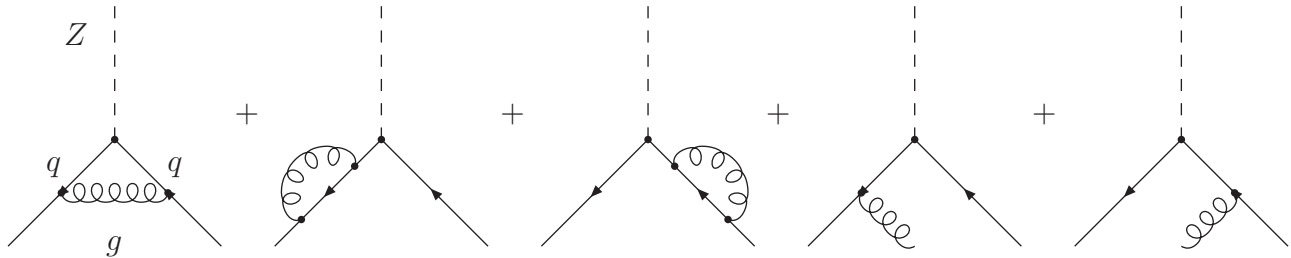
E = Energie im Schwerpunktsystem von $e^+e^- \rightarrow Z^{(*)} \rightarrow f \bar{f}$

Totale Z-Breite:

$$\Gamma_{exp}^{tot}(Z) = 2495,2 \pm 2,3 \text{ MeV} \quad (314)$$

Ursache für Diskrepanz zwischen (309) und (310): QCD-Strahlungskorrekturen

1-Loop:



Effekt: ($g_S = \text{QCD-Strahlungskonstante}$)

$$\alpha_S = \frac{g_S^2}{4\pi} = 0,12$$

$$\Gamma(Z \rightarrow q \bar{q}) = \underbrace{\Gamma^{(0)}(Z \rightarrow q \bar{q})}_{\text{Baumgraphresultat}} \underbrace{\left[1 + \frac{\alpha_S}{\pi}\right]}_{\approx 1,038} \quad (315)$$

Mit (310) finden wir also:

$$\Gamma(Z \rightarrow \text{Hadronen}) = 1689 \text{ MeV} \cdot 1,038 = 1753 \text{ MeV} \quad (316)$$

Dies stimmt mit (309) auf 0,5% Genauigkeit überein.

$d\Gamma$ ohne Mittelung über Z-Polarisation:

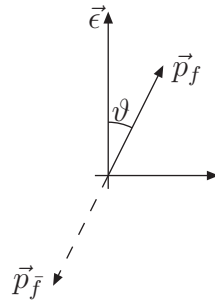
Nutze aus:

- $p_{\bar{f}} = k - p_f \Rightarrow \epsilon_{\nu}^{(s)*}(k) p_{\bar{f}}^{\nu} = \underbrace{\epsilon_{\nu}^{(s)*}(k) k^{\nu}}_{=0 \text{ (290)}} - \epsilon_{\nu}^{(s)*}(k) p_f^{\nu}$ und $\epsilon_{\mu}^{(s)}(k) p_{\bar{f}}^{\mu} = -\epsilon_{\mu}^{(s)}(k) p_f^{\mu}$
- $\epsilon_{\mu}^{(s)}(k) \epsilon_{\nu}^{(s)*}(k) g^{\mu\nu} \stackrel{(290)}{=} -1$
- $2p_f p_{\bar{f}} = M_Z^2 - 2m^2$

Damit wird (298) zu:

$$\sum_{s_f, s_{\bar{f}}} |\mathcal{M}_V|^2 = 4 \left[-2 |\epsilon^{(s)}(k) p_f|^2 + p_f p_{\bar{f}} + m^2 \right] \stackrel{(317)}{=} -8 |\epsilon^{(s)}(k) p_f|^2 + 2M_Z^2 \quad (317)$$

Wählen wir $\epsilon^{(s)}$ reell, z.B. $\epsilon^{(s)} = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^{\top}$ und definieren $\epsilon^{(s)} p_f = |\vec{p}_f| \cos \vartheta$ im Ruhesystem,



so ist mit $|\vec{p}_f| = \sqrt{E_f^2 - m^2} = \sqrt{\frac{M_Z^2}{4} - m^2}$ (317) gleich:

$$\sum_{s_f, s_{\bar{f}}} |\mathcal{M}_V|^2 = -2(M_Z^2 - 4m^2) \cos^2 \vartheta + 2M_Z^2 = 2M_Z^2 \sin^2 \vartheta + 8m^2 \cos^2 \vartheta \quad (318)$$

Analog zu (317) und (318) erhält man:

$$\sum_{s_f, s_{\bar{f}}} |\mathcal{M}_A|^2 = 4 \left[-2 |\epsilon^{(s)}(k) p_f|^2 + p_f p_{\bar{f}} - m^2 \right] = \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} |\mathcal{M}_A|^2 - 8m^2 = 2(M_Z^2 - 4m^2) \sin^2 \vartheta$$

Mit (280) können wir die differentielle Zerfallsrate für ein polarisiertes Z-Boson ausrechnen. Vektoranteil:

$$d\Gamma_V(Z \rightarrow f \bar{f}) = \frac{1}{8\pi^2 M_Z} g_V^2 \frac{d^3 \vec{p}_f}{2E_f} \frac{d^3 \vec{p}_{\bar{f}}}{2E_{\bar{f}}} \delta^{(4)}(k - p_f - p_{\bar{f}}) (2M_Z^2 \sin^2 \vartheta + 8m^2 \cos^2 \vartheta) \quad (319)$$

Wir setzen $d^3 \vec{p}_f = |\vec{p}_f|^2 d|\vec{p}_f| d\varphi d\cos\vartheta$ und integrieren über $\vec{p}_f$ und über φ und $|\vec{p}_f|$, analog zur Berechnung von (303)

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_V(Z \rightarrow f \bar{f})}{d\cos\vartheta} &:= \int d^3 \vec{p}_f \int_0^\infty |\vec{p}_f|^2 d|\vec{p}_f| \int_0^{2\pi} d\varphi d\Gamma_V(Z \rightarrow f \bar{f}) \\ &= \frac{1}{16\pi M_Z^2} \sqrt{M_Z^2 - 4m^2} g_V^2 (M_Z^2 \sin^2 \vartheta + 4m^2 \cos^2 \vartheta) \end{aligned} \quad (320)$$

Integration über $d\cos\vartheta$ reproduziert $\bar{\Gamma}$ in (304)

$$\frac{d\Gamma_A(Z \rightarrow f \bar{f})}{d\cos\vartheta} = \frac{1}{16\pi M_Z^2} \sqrt{M_Z^2 - 4m^2} g_A^2 (M_Z^2 - 4m^2) \sin^2 \vartheta$$

Für $m = 0$ ist also:

$$\frac{d\Gamma(Z \rightarrow f \bar{f})}{d\cos\vartheta} = \frac{M_Z}{16\pi} (g_A^2 + g_V^2) (1 - \cos^2 \vartheta) \quad (321)$$

(321) bedeutet, dass es für ($m = 0$) keinen Zerfall in Richtung des Z-Spins gibt:

$$\frac{d\Gamma}{d\cos\vartheta} = 0 \quad \text{für } \vartheta = 0, \pi$$

Die bevorzugte Richtung ist transversal. Beim LEP-I Experiment wurden Z-Bosonen über $e^+e^- \rightarrow Z$ produziert, sie waren bevorzugt transversal polarisiert.

$$\begin{array}{c} e^+ \quad \epsilon^{(s)} \uparrow \quad e^- \\ \longrightarrow \quad \quad \longleftarrow \end{array}$$

5.3.3 Dreikörperzerfälle

Lorentz-Invarianter n -Teilchen-Phasenraum: (Notation aus [PDT, Kap 38.4])

$$\begin{aligned} E_j &= \sqrt{\vec{p}_j^2 + m^2}, \quad P^2 = M^2 \\ d\phi_n(P; p_1, \dots, p_n) &= \delta^{(4)}\left(P - \sum_{j=1}^n p_j\right) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j} \end{aligned} \quad (322)$$

$$\begin{aligned} n = 3: \quad q &:= p_1 + p_2 = P - p_3 \\ d\phi_3 &= \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \end{aligned} \quad (323)$$

Nun ist $\delta^{(4)}(P - p_1 - p_2 - p_3) = \int d^4q \delta^{(4)}(P - q - p_3) \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2)$, ($p_1^0 + p_2^0 > 0 \Rightarrow q^0 > 0$) und

$$\delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) \frac{d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^6 2E_1 2E_2} = d\phi_2(q; p_1, p_2)$$

Mit $s := q_0^2 - \vec{q}^2$ ist $q_0 = \sqrt{s + \vec{q}^2}$ und

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dq^0 \delta^{(4)}(P - q - p_3) \underbrace{f(q; p_3)}_{\text{beliebige Funktion}} &= \int_0^\infty \frac{ds}{2\sqrt{s + \vec{q}^2}} \delta^{(4)}(P - q - p_3) f(q; p_3) \Big|_{q^0 = \sqrt{s + \vec{q}^2}} \\ \Rightarrow \int_{q^0 > 0} d^4q \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} &= \int ds \int \frac{d^3\vec{q} d^3\vec{p}_3}{2\sqrt{s + \vec{q}^2} (2\pi)^3 2E_3} \\ \int_{q^0 > 0} d^4q \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \delta^{(4)}(P - q - p_3) &= \underbrace{\int_0^\infty ds (2\pi)^3}_{\{1\}} \underbrace{\int_{\vec{q}} d\phi_2(P; q, p_3)}_{\{2\}} \quad \text{mit } q^2 = s \end{aligned} \quad (324)$$

$\{1\}$: Integration über alle fiktiven Massen

$\{2\}$: Zwei-Teilchen-Phasenraum eines Zerfalls eines Teilchens mit Masse M in Teilchen 3 und ein fiktives Teilchen mit Masse $\sqrt{s}$ und Impuls q . (Integration über $\vec{q}$, nicht $\vec{p}_3$.)

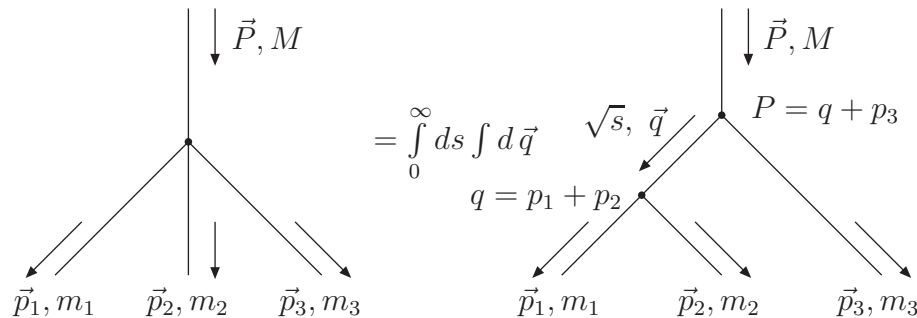
Mit (324) wird (323) zu

$$d\phi_3(P; p_1, p_2, p_3) = (2\pi)^3 \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} ds \int_{\vec{q}} d\phi_2(P; q, p_3) d\phi_2(q; p_1, p_2) \quad (325)$$

„Faktorisierung des Phasenraums“ (ist eigentlich eine Faltung)

$$d\phi_3(P; p_1, p_2, p_3) = (2\pi)^3 \int_0^\infty ds \int_{\vec{q}} d\phi_2(P; q, p_3) d\phi_2(q; p_1, p_2)$$

Graphisch:



$\sqrt{s}$ heißt die **invariante Masse** des Teilchenpaars (1,2)

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 B &= \int d\phi_3(P, p_1, p_2, p_3) f(p_1 p_2) = (2\pi)^{-9} \int_0^\infty ds \int \frac{d^3 \vec{q}}{2\sqrt{s + \vec{q}^2}} \int \frac{d^3 \vec{p}_3}{2E_3} \delta^{(4)}(P - q - p_3) \\
 &\quad \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2E_1} \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{2E_2} \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) f(p_1 p_2) \\
 \text{Nun ist } p_1 p_2 &= \frac{q^2 - p_1^2 - p_2^2}{2} = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2} \\
 B &= (2\pi)^{-9} \int_0^\infty ds \int \frac{d^3 \vec{q}}{2\sqrt{s + \vec{q}^2}} \int \frac{d^3 \vec{p}_3}{2E_3} \delta^{(4)}(P - q - p_3) f\left(\frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2}\right) \\
 &\quad \underbrace{\int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2E_1} \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{2E_2} \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2)}_{=: I(q^2, m_1^2, m_2^2) \text{ aus (303)}}
 \end{aligned}$$

$I(q^2, m_1^2, m_2^2)$ ist das 2-Teilchen-Phasenraumintegral aus (303) lediglich mit verschiedenen Massen.

$$\begin{aligned}
 I(M^2, m_a^2, m_b^2) &= \frac{\pi}{2M^2} \lambda(M^2, m_a^2, m_b^2) \theta(M - m_a - m_b) \\
 \text{mit } \lambda(a, b, c) &:= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc} = [(a + b - c)^2 - 4ab]^{1/2} \quad (326)
 \end{aligned}$$

λ^2 heißt Källén-Funktion. Das $\vec{q}, \vec{p}_3$ -Integral ist *ebenfalls* das 2-Teilchen-Phasenraumintegral aus (303)! $\frac{I}{(2\pi)^2}$ heißt **2-Körper-Phasenraumelement** (setze $M = 1$).

Also:

$$\begin{aligned}
 B &= (2\pi)^{-9} \int_0^\infty ds f\left(\frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2}\right) I(P^2, q^2, m_3^2) I(q^2, m_1^2, m_2^2) \\
 &= (2\pi)^{-9} \int_0^\infty ds f\left(\frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2}\right) \theta(M - \sqrt{s} - m_3) \theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2) \\
 &\quad \frac{\pi^2}{4M^2 s} \lambda(M^2, s, m_3^2) \lambda(s, m_1^2, m_2^2) \\
 &= \frac{(2\pi)^{-7}}{16M^2} \int_{(m_1 + m_2)^2}^{(M - m_3)^2} \frac{ds}{s} f\left(\frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2}\right) \lambda(M^2, s, m_3^2) \lambda(s, m_1^2, m_2^2) \quad (327)
 \end{aligned}$$

(Referenz zum Thema Phasenraum: H. Pietschmann)

Das Dreikörperphasenraumvolumen erhält man aus B mit $f(\dots) = (2\pi)^4$. (327) ist selbst für $f = 1$ nicht elementar lösbar, es ist ein elliptisches Integral.

Eigenschaften der Källén-Funktion:

- $\lambda(a, b, c)$ ist symmetrisch in a, b, c

$$\lambda(M^2, m_a^2, m_b^2) = \sqrt{(M^2 - (m_a + m_b)^2)(M^2 - (m_a - m_b)^2)} \quad (328)$$

$$\lambda(a, b, 0) \stackrel{(326)}{=} |a - b| \quad (329a)$$

$$\lambda((p_1 + p_2)^2, p_1^2, p_2^2) = 2\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 \cdot p_2^2} \quad (329b)$$

Wir lösen B in (327) für $m_2 = m_3 = 0$, $m_1 = m$, $M > m$ und $f(x) = (2\pi)^4$:

$$\begin{aligned} B &= \frac{(2\pi)^{-7}}{16M^2} \int_{m^2}^{M^2} \frac{ds}{s} (2\pi)^4 \underbrace{(M^2 - s)}_{(329a)} \underbrace{(s - m^2)}_{(329a)} = \frac{(2\pi)^{-3}}{16M^2} \int_{m^2}^{M^2} ds \left[-s + M^2 + m^2 - \frac{m^2 M^2}{s} \right] \\ &= \frac{(2\pi)^{-3}}{16M^2} \left[\frac{1}{2}(M^4 - m^4) - m^2 M^2 \ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) \right] \\ &= \text{3-Körper-Phasenraumelement für } m_2 = m_3 = 0 \end{aligned} \quad (330)$$

Für $m = M$ verschwindet B .

Für $m = 0$ findet man:

$$B = M^2 \frac{1}{32(2\pi)^3} = M^2 \frac{\pi}{(4\pi)^4} \quad (331)$$

Vergleich mit 2-Körper-Phasenraumvolumen in (303) für $m = 0$

$$\frac{I(M^2, 0, 0)}{(2\pi)^2} = 2 \frac{\pi}{(4\pi)^2} \quad (332)$$

Faustregel: Jedes zusätzliche Teilchen im Endzustand kostet einen Faktor $\frac{1}{16\pi^2} \approx \frac{1}{150}$

$\Rightarrow$ Vielteilchenzerfälle sind im allgemeinen unterdrückt.

Eine wichtige Anwendung von (325) ist der **Dalitz-Plot**.

Überlegung: Führen 4 Impulsintegrationen über $d\phi_3$ in (323) aus, so dass $\delta^{(4)}(P - p_1 - p_2 - p_3)$ verschwindet, es verbleiben $9 - 4 = 5$ Variablen des Phasenraums. Davon sind 3 nur Eulerwinkel, die die Lage der Zerfallsebene im Raum beschreiben. Die physikalische Dynamik der Zerfalls eines unpolarisierten Teilchens hängt also nur von $5 - 3 = 2$ Variablen ab.

Man wählt

$$s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = (P - p_3)^2 \quad (333a)$$

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (P - p_1)^2 \quad (333b)$$

Im Ruhesystem $P = (M \ 0 \ 0 \ 0)^\top$ ist gerade:

$$s_{12} = P^2 - 2P p_3 + p_3^2 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3 \quad (334a)$$

$$s_{23} = M^2 + m_1^2 - 2ME_1 \quad (334b)$$

d.h. die Variablen s_{12}, s_{23} hängen mit den Energien E_3, E_1 zusammen, die im Experiment gemessen werden. Die differentielle, unpolarisierte Zerfallsrate ist (siehe (280)):

$$d\bar{\Gamma} = \frac{1}{2M} \left(\prod_f \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \overline{|\mathcal{M}|^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2 - p_3) = \frac{(2\pi)^4}{2M} d\phi_3(P; p_1, p_2, p_3) \overline{|\mathcal{M}|^2} \quad (335)$$

Nun hängt $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ von den Skalarprodukten $p_1 p_2, p_2 p_3$ und $p_1 p_3$ (und deren Massen) ab. Es ist

$$\begin{aligned} 2p_1 p_2 &= s_{12} - m_1^2 - m_2^2 \\ 2p_2 p_3 &= s_{23} - m_2^2 - m_3^2 \\ \text{und } 2p_1 p_3 &= (p_1 + p_3)^2 - m_1^2 - m_3^2 = (P - p_2)^2 - m_1^2 - m_3^2 \\ &= M^2 - m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - 2 \underbrace{P}_{=p_1+p_2+p_3} p_2 = -s_{12} - s_{23} + M^2 + m_2^2 \end{aligned} \quad (336)$$

D.h. $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ hängt nur von den Massen und s_{12}, s_{23} ab. Die differentielle Zerfallsrate

$$\frac{d\bar{\Gamma}}{ds_{12} ds_{23}} := \frac{(2\pi)^4}{2M} \int \delta(s_{12} - (p_1 + p_2)^2) \delta(s_{23} - (p_2 + p_3)^2) d\phi_3(P; p_1, p_2, p_3) \overline{|\mathcal{M}|^2}$$

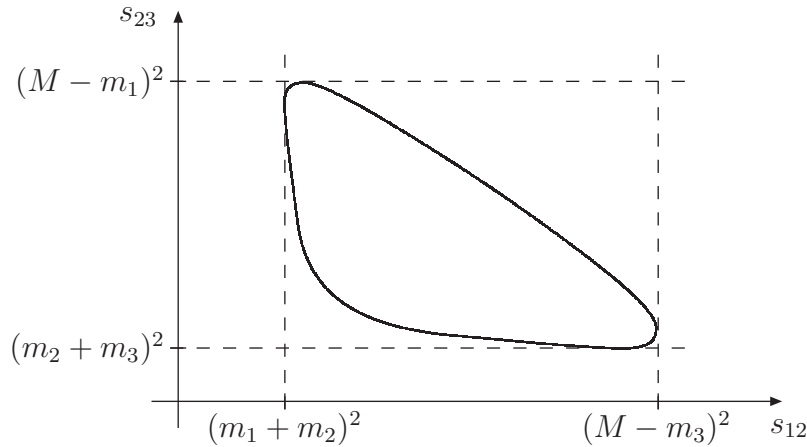
ist also einfach zu berechnen, weil $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ vor das Phasenraumintegral gezogen werden kann:

$$\frac{d\bar{\Gamma}}{ds_{12} ds_{23}} = \frac{(2\pi)^4}{2M} \overline{|\mathcal{M}|^2}(s_{12}, s_{23}) \int \delta(s_{12} - (p_1 + p_2)^2) \delta(s_{23} - (p_2 + p_3)^2) d\phi_3(P; p_1, p_2, p_3) \quad (337)$$

Integriert man über $d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3$, so findet man

$$\frac{d\bar{\Gamma}}{ds_{12} ds_{23}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{M}{64} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32\pi^3} \overline{|\mathcal{M}|^2} \quad (338)$$

wobei s_{12} und s_{23} so gewählt sind, dass der Zerfall kinematisch erlaubt ist ($(m_1 + m_2)^2 \leq s_{12} \leq (M - m_3)^2$, usw.). Die Auftragung von $\frac{d\bar{\Gamma}}{ds_{12} ds_{23}}$ gegen s_{12}, s_{23} nennt man **Dalitz-Plot**.



Konstantes $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ bedeutet, dass $\frac{d\bar{\Gamma}}{ds_{12} ds_{23}}$ im markierten Bereich konstant ist und außerhalb verschwindet.

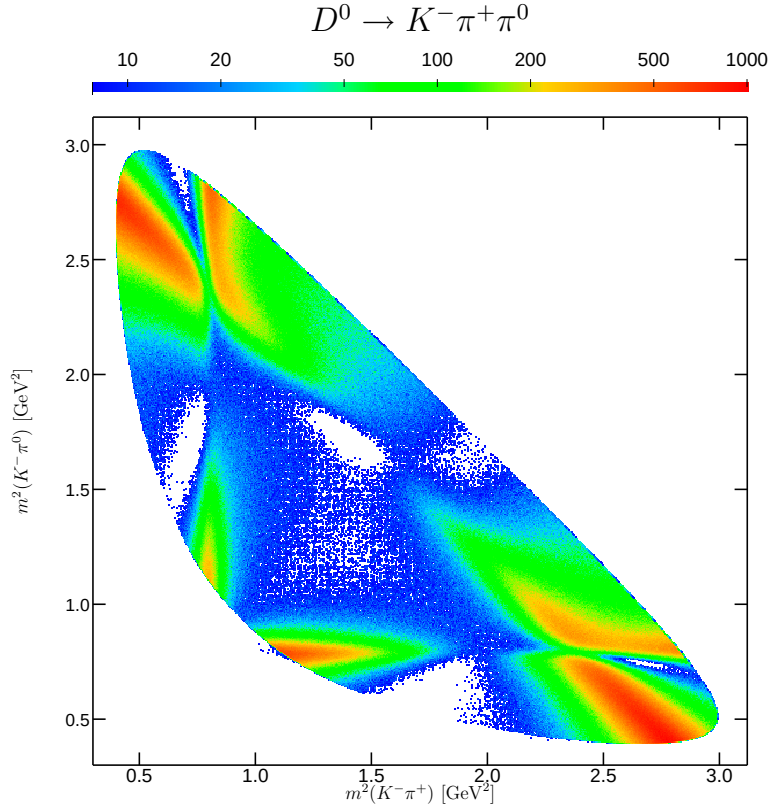
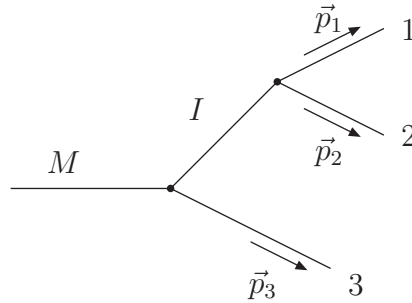


Abbildung 1: Monte-Carlo Simulation des Zerfalls D^0 nach $K^-\pi^+\pi^0$ (Erzeugt mit EvtGen, 10 Mio. Zerfälle, Binning: 0,005 GeV²)

⇒ Experimentell verrät der Dalitz-Plot etwas über $|\overline{\mathcal{M}}|^2$. Z.B. bedeutet ein instabiles Teilchen I in der Zerfallskette



eine Häufung von Zerfällen im Dalitz-Plot bei $s_{12} = M_I^2$. Die Grenzen des Dalitz-Plot ergeben sich aus den θ -Funktionen aus der Integration in (337). Das Resultat ist, dass $\frac{d\bar{\Gamma}}{ds_{12} ds_{23}} \neq 0$ impliziert:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)^2 &\leq s_{12} \leq (M - m_3)^2 \\ s_{23}^{\min} &\leq s_{23} \leq s_{23}^{\max} \end{aligned}$$

mit

$$s_{23}^{\min/\max} = \frac{(M^2 + m_2^2 - m_1^2 - m_3^2)^2 - [\lambda(s_{12}, m_1^2, m_2^2) \pm \lambda(M^2, s_{12}, m_3^2)]^2}{4s_{12}} \quad (339)$$

Für festes s_{12} ist $s_{23}^{\min}$ bzw. $s_{23}^{\max}$ durch die Impulskonfigurationen bestimmt, bei der $\vec{p}_2$ und $\vec{p}_3$ parallel bzw. antiparallel sind.

Die auftretenden Källén-Funktionen sind von der Form $\lambda^2((p \pm q)^2, p^2, q^2)$ mit zeitartigen Vektoren p, q . λ^2 ist dann immer positiv, so dass die Wurzeln reell sind. Es ist für $\lambda((p \pm q)^2, p^2, q^2) \geq 0$ sogar hinreichend, dass nur einer der Vektoren p, q oder $p + q$ zeitartig ist, denn

$$\lambda^2((p \pm q)^2, p^2, q^2) \stackrel{(329b)}{=} 4((pq)^2 - p^2 q^2)$$

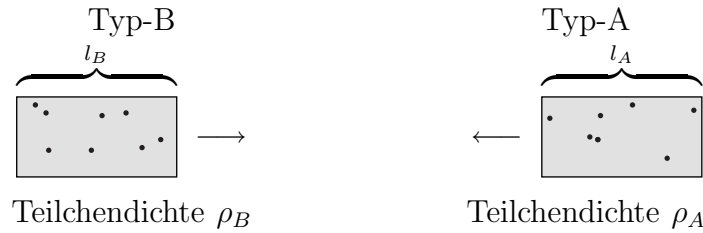
Sei $p^2 > 0$: dann gilt im Ruhesystem von $p = (m_p \ 0 \ 0 \ 0)^\top$

$$\lambda^2((p \pm q)^2, p^2, q^2) = 4(m_p^2 E_q^2 - m_p^2 m_q^2) = 4m_p^2(E_q^2 - m_q^2) = 4m_p^2 |\vec{q}|^2 > 0 \quad (340)$$

Da λ symmetrisch in den Argumenten ist, gilt: (340) auch für die Fälle $q^2 > 0$ oder $(p + q)^2 > 0$ (Impulskonfigurationen $p, q, p + q$ mit $\lambda^2((p \pm q)^2, p^2, q^2) < 0$ nennt man **euklidisch**)

5.3.4 Streuquerschnitt

Teilchen-Bunches



Der Überlapp der Stirnflächen der beiden Teilchen-Bunches sei A . Die Zahl der Streueignisse ist proportional zu $A, \rho_A, \rho_B, l_A, l_B$. Der **totale Streuquerschnitt** ist

$$\sigma = \frac{\text{Zahl der Streueignisse}}{\rho_A l_A \rho_B l_B A} \quad (341a)$$

Man definiert prozess-spezifische Streuquerschnitte, z.B.:

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{\text{Zahl der } e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \text{-Ereignisse}}{\rho_A l_A \rho_B l_B A}$$

Differentielle Streuquerschnitt, z.B.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\varphi d\cos\vartheta} = \frac{\text{Zahl der unter Winkel } \varphi, \theta \text{ gestreuten Teilchen}}{\rho_A l_A \rho_B l_B A}$$

für Endzustände aus 2-Teilchen oder

$$d\sigma = \frac{\text{Zahl der Streuungen in } N - \text{Teilchen mit Impulsen im Volumenelement } d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_N}{\rho_A l_A \rho_B l_B A} \quad (341b)$$

Skalare Theorie: Wellenpakete für einlaufende Teilchen

$$|\phi_A \phi_B\rangle = \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_B}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_A 2E_B}} \phi_A(\vec{k}_A) \phi_B(\vec{k}_B) \exp(-i\vec{b} \cdot \vec{k}_B) |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle \quad (342)$$

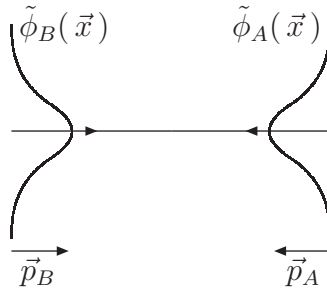
($\phi_{A,B}$ sind hierbei Wellenpakete, *keine* Feldoperatoren!) Die Normierungsbedingung ist so gewählt, dass die Normierungsbedingung (147) für $|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_{in}$ und $\langle \phi_A \phi_B | \phi_A \phi_B \rangle = 1$ gerade

$$\int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} |\phi_{A,B}(\vec{k})|^2 = 1 \quad (343)$$

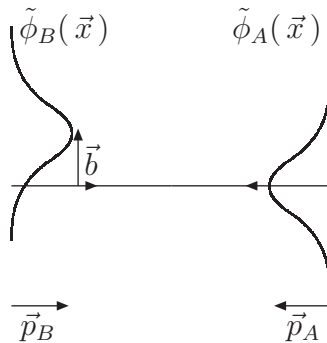
entspricht. Aus $\phi_B(\vec{k}_B)$ wurde ein Faktor $\exp(-i\vec{b} \cdot \vec{k}_B)$ herausdefiniert. Im Ortsraum seien

$$\tilde{\phi}_{A,B}(\vec{x}) := \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \phi_{A,B}(\vec{k}) \quad (344)$$

um die Strahlachse des Beschleunigers zentriert



$\exp(-i\vec{b} \cdot \vec{k}_B) \phi_B(\vec{k})$ entspricht dann wegen (344) $\tilde{\phi}_B(\vec{x} + \vec{b})$, also einem um den **Stoßparameter** $\vec{b}$ versetzten Wellenpaket.



Wir wählen weiter $\phi_{A,B}(\vec{k})$ so, dass sie stark um die Impulse $\vec{p}_A, \vec{p}_B$ zentriert sind und $\vec{p}_A$ und $\vec{p}_B$ antiparallel sind. $\vec{b}$ ist so definiert, dass $\vec{p}_B \cdot \vec{b} = \vec{p}_A \cdot \vec{b} = 0$

Übergangswahrscheinlichkeit für

$$|\phi_A \phi_B\rangle_{in} \rightarrow |\vec{p}_1 \dots \vec{p}_N\rangle_{out}$$

$$\text{ist } dP(\vec{b}) = \underbrace{\prod_{f=1}^N \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f}}_{\text{vgl. (280) aus Normierung}} |\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N | \phi_A \phi_B \rangle|^2 \quad (345)$$

Die Zahl der Streueignisse im Flächenelement $d^2\vec{b} = db^x db^y$:

$$N = \rho_A l_A \rho_B l_B d^2\vec{b} dP(\vec{b}) \quad (346)$$

($\rho_X l_X$: Teilchendichten pro Querschnittsfläche, $d^2\vec{b}$: Überlapp der Stirnfächen), wobei $\vec{p}_{A,B} = (0 \ 0 \ p_{A,B}^z)^\top$ gewählt ist und somit $\vec{b} = (b^x \ b^y \ 0)^\top$. Vergleich von (346) mit (341b):

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\sigma(\phi_{A,B}) = \int d^2\vec{b} dP(\vec{b}) \\ &\stackrel{(345)}{=} \int d^2\vec{b} \prod_{f=1}^N \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} |\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N | \phi_A \phi_B \rangle|^2 \end{aligned} \quad (347)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(342)}{=} \prod_{f=1}^N \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \int d^2\vec{b} \prod_{i=A,B} \int \frac{d^3\vec{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_{k_i}}} \int \frac{d^3\vec{l}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\vec{l}_i)}{\sqrt{2E_{l_i}}} \exp(i\vec{b}(\vec{l}_i - \vec{k}_i)) \\ &\quad \text{}_{out} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_{in} \text{}_{out} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N | \vec{l}_A \vec{l}_B \rangle_{in}^* \end{aligned} \quad (348)$$

Nun ist

$$\int d^2\vec{b} \exp(i\vec{b}(\vec{l}_i - \vec{k}_i)) = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(k_i^\perp - l_i^\perp) = (2\pi)^2 \delta(k_i^x - l_i^x) \delta(k_i^y - l_i^y)$$

Mit $\mathbf{S} = 1 + i\mathbf{T}$ und

$$\begin{aligned} \text{}_{out} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_{in} &= \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N | \mathbf{S} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle = i \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N | \mathbf{T} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle \\ &=: i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B - \sum_{i=1}^N p_i) \mathcal{M}(\vec{k}_A, \vec{k}_B, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) \end{aligned} \quad (349)$$

finden wir in (348)

$$\begin{aligned} d\sigma(\phi_{A,B}) &= \prod_{f=1}^N \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \prod_{i=A,B} \int \frac{d^3\vec{k}_i d^3\vec{l}_i}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{k_i} 2E_{l_i}}} \phi_i(\vec{k}_i) \phi_i^*(\vec{l}_i) (2\pi)^2 \delta^{(2)}(k_i^\perp - l_i^\perp) \\ &\quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B - \sum_{j=1}^N p_j) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(l_A + l_B - \sum_{j=1}^N p_j) \\ &\quad \mathcal{M}(\vec{k}_A, \vec{k}_B, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) \mathcal{M}^*(\vec{l}_A, \vec{l}_B, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) \end{aligned} \quad (350)$$

Die Integration über l_i^x und l_i^y ersetzt $l_i^{x,y} \rightarrow k_i^{x,y}$ wegen $\delta^{(2)}(k_i^\perp - l_i^\perp)$. Die Integration über l_A^z, l_B^z ist von der Form:

$$\begin{aligned} &\int dl_A^z dl_B^z \delta(l_A^z + l_B^z - \sum_{f=1}^N p_f^z) \delta(E_A + E_B - \sum_{f=1}^N p_f^0) \\ &= \int dl_A^z \delta(\sqrt{\vec{l}_A^2 + m_A^2} + \sqrt{\vec{l}_B^2 + m_B^2} - \sum_{f=1}^N E_f) \Big|_{l_B^z = \sum_{f=1}^N p_f^z - l_A^z} \\ &= \frac{1}{\left| \frac{l_A^z}{E_A} - \frac{l_B^z}{E_B} \right|} = \frac{1}{|\vec{v}_A - \vec{v}_B|} \quad \text{mit } \vec{v}_{A,B} := \frac{\vec{l}_{A,B}}{E_{A,B}} \end{aligned} \quad (351)$$

wobei $v_{A,B} = |\vec{v}_{A,B}|$ die Geschwindigkeiten der beiden Teilchenstrahlen im Schwerpunktsystem sind.

Mit (351) wird (350) zu

$$d\sigma(\phi_{A,B}) = \prod_{f=1}^N \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \int \frac{d^3\vec{k}_A d^3\vec{k}_B}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} |\phi_A(\vec{k}_A)|^2 |\phi_B(\vec{k}_B)|^2 \frac{1}{2E_A 2E_B |\vec{v}_A - \vec{v}_B|} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B - \sum_{j=1}^N p_j) |\mathcal{M}(\vec{k}_A, \vec{k}_B, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)|^2 \quad (352)$$

$d\sigma(\phi_{A,B})$ in (352) hängt noch von der Wahl der ϕ_A, ϕ_B ab. Je stärker $\phi_{A,B}$ um $\vec{p}_A, \vec{p}_B$ zentriert sind, desto schwächer ist die Abhängigkeit. Mit

$$d\sigma(k_A, k_B, p_1 \dots p_N) = \prod_{f=1}^N \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B - \sum_{f=1}^N p_f)}{2E_A 2E_B |\vec{v}_A - \vec{v}_B|} |\mathcal{M}(\vec{k}_A, \vec{k}_B, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)|^2 \quad (353)$$

ist

$$d\sigma(\phi_{A,B}) = \int \frac{d\vec{k}_A d\vec{k}_B}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} |\phi_A(\vec{k}_A)|^2 |\phi_B(\vec{k}_B)|^2 d\sigma(k_A, k_B, p_1 \dots p_N)$$

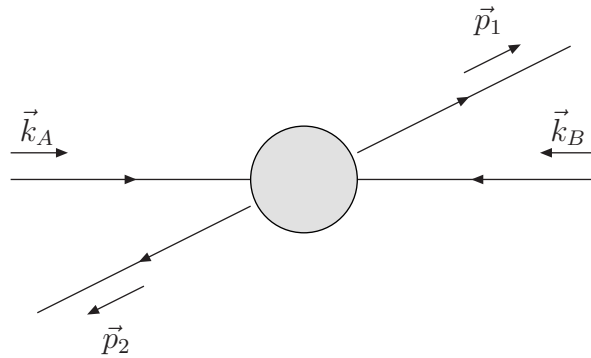
Es ist weiter:

$$\frac{1}{E_A E_B |\vec{v}_A - \vec{v}_B|} = \frac{1}{|E_B p_A^z - E_A p_B^z|} = \frac{1}{|\varepsilon_{\mu 1 2 \nu} p_A^\mu p_B^\nu|} \quad (354)$$

invariant bezüglich Boost in z-Richtung, gilt also auch im Laborsystem bei asymmetrischer Strahlenenergie ($E_A \neq E_B$) (z.B. HERA, PeP-II (BaBar), KEK B (BELLE))

(353) gilt auch für Teilchen mit Spin im Anfangszustand, z.B. Elektronen / Positronen. Wichtiger Spezialfall: $2 \rightarrow 2$ Streuung

Im Schwerpunktsystem:



$\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$, $\vec{q} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{k}_A + \vec{k}_B$, $q^0 = E_{CM}$ = Energie im Schwerpunktsystem. (Für zwei Strahlenenergien E_A, E_B ist $E_{CM} = 2\sqrt{E_A E_B}$)

$$\begin{aligned} \int d\phi_2(q; p_1, p_2) &= \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^6 2E_1 2E_2} \delta(E_{CM} - E_1 - E_2) \text{ mit } |\vec{p}_2| \rightarrow |\vec{p}_1| \\ &= \int \frac{d|\vec{p}_1| |\vec{p}_1|^2 d\Omega}{(2\pi)^6 2E_1 2E_2} \delta(E_{CM} - \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_2^2}) \quad (355a) \end{aligned}$$

Die Nullstelle der δ - Funktion ist:

$$|\vec{p}_1| = \frac{\lambda(E_{CM}^2, m_1^2, m_2^2)}{2E_{CM}} \Rightarrow E_{1,2} = \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_{1,2}^2} = \frac{E_{CM}^2 \pm (m_1^2 - m_2^2)}{2E_{CM}} \quad (355b)$$

und nur positiv für $E_{CM} > m_1 + m_2$

$$\begin{aligned} \int d\phi_2(q; p_1, p_2) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\Omega \frac{|\vec{p}_1|^2}{4E_1 E_2} \left(\frac{|\vec{p}_1|}{E_1} + \frac{|\vec{p}_1|}{E_2} \right)^{-1} \theta(E_{CM} - m_1 - m_2) \\ &\quad \text{mit } |\vec{p}_1| \text{ wie in (355b)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\Omega \frac{1}{4} \frac{|\vec{p}_1|}{E_{CM}} \theta(E_{CM} - m_1 - m_2) \end{aligned} \quad (356)$$

(gilt für beliebige Bereiche des Raumwinkels)

Um den differentiellen Streuquerschnitt $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM}$ zu erhalten, müssen wir auf die Integration über $d\Omega$ verzichten. Mit (353) finden wir

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{2E_A 2E_B |\vec{v}_A - \vec{v}_B|} \frac{|\vec{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{CM}} |\mathcal{M}|^2 \quad (357a)$$

wobei überall

$$\vec{p}_2 = -\vec{p}_1, \quad |\vec{p}_1| = \frac{\lambda(E_{CM}^2, m_1^2, m_2^2)}{2E_{CM}}, \quad E_1 = \frac{E_{CM}^2 + m_1^2 - m_2^2}{2E_{CM}}$$

gesetzt werden muss.

In vielen Experimenten ist der Strahl unpolarisiert, d.h. man muss über die Polarisationen im Anfangszustand mitteln. Beobachtet man außerdem nicht die Polarisationen im Endzustand, so ist über sie zu summieren, d.h.

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \overline{|\mathcal{M}|^2}$$

Speziell für

$$\begin{aligned} m_A &= m_B \Rightarrow E_A = E_B = \frac{E_{CM}}{2}, \quad v_A^z = -v_B^z = \frac{k_A^z}{E_A} = \frac{2k_A^z}{E_{CM}} \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2} \frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{k}_A|} \end{aligned} \quad (357b)$$

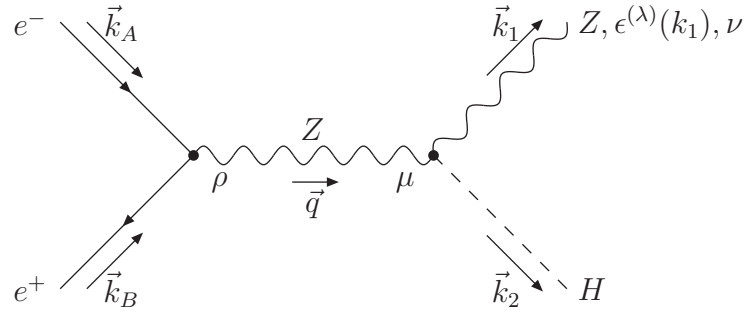
Noch spezieller: Alle 4 Massen sind gleich, zusätzlich

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = \frac{E_{CM}}{2} \Rightarrow |\vec{p}_1| = |\vec{k}_A| = |\vec{k}_B| \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2} \end{aligned} \quad (358)$$

Anwendung: Higgs-Suche bei LEP-II. LEP-II: e^+e^- – Kollider mit $\sqrt{s} \approx 200 \text{ GeV}$

Problem: Higgs-Kopplung an leichte Teilchen sind klein.

Dominanter Prozess bei LEP-II:



$$q = k_A + k_B = k_1 + k_2, \quad q^2 = s$$

Feynman-Regel:

$$ig^{\mu\nu} g_H M_Z, \quad [g_H] = 0 \quad (359)$$

Wir setzen voraus, dass $\sqrt{s} \geq M_H + M_Z$, so dass die Z/Higgs-Produktion kinematisch erlaubt ist. Mit den Feynman-Regeln (286),(294),(295) und

$$i\mathcal{M} = ig_A \mathcal{M}_A + ig_V \mathcal{M}_V$$

sowie Vernachlässigung der Elektronenmasse

$$\left. \begin{array}{l} i\mathcal{M}_V \\ i\mathcal{M}_A \end{array} \right\} = \bar{v}(k_B, s_B) \gamma_\rho \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \gamma_5 \end{array} \right\} u(k_A, s_A) i \frac{-i \left[g^{\rho\mu} - \frac{q^\rho q^\mu}{M_Z^2} \right]}{q^2 - M_Z^2} ig_{\mu\nu} g_H M_Z \epsilon^{\nu(\lambda)*}(k_1) \quad (360)$$

$$= ig_H \frac{M_Z}{s - M_Z^2} \bar{v}(k_B, s_B) \gamma_\mu \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \gamma_5 \end{array} \right\} u(k_A, s_A) \epsilon^{\mu(\lambda)*}(k_1) \quad (361)$$

denn $q^\rho \bar{v}(k_B, s_B) \gamma_\rho \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \gamma_5 \end{array} \right\} u(k_A, s_A) \stackrel{q=k_A+k_B}{=} \underbrace{\bar{v} \not{k}_B}_{=m_e \bar{v} \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \gamma_5 \end{array} \right\} u + \bar{v} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\gamma_5 \end{array} \right\} \underbrace{\not{k}_A u}_{=m_e u \rightarrow 0}$

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_V|^2} &= g_H^2 \frac{M_Z^2}{(s - M_Z^2)^2} \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{Mittelwert über } s_A, s_B} \epsilon^{\mu(\lambda)*}(k_1) \epsilon^{\nu(\lambda)}(k_1) \underbrace{\text{tr}(\gamma_\mu \not{k}_A \gamma_\nu \not{k}_B)}_{=4[k_{A\mu} k_{B\nu} + k_{B\mu} k_{A\nu} - k_A k_B g_{\mu\nu}]} \text{ siehe (298)} \\ &= g_H^2 \frac{M_Z^2}{(s - M_Z^2)^2} \epsilon^{\mu(\lambda)*}(k_1) \epsilon^{\nu(\lambda)}(k_1) [k_{A\mu} k_{B\nu} + k_{B\mu} k_{A\nu} - k_A k_B g_{\mu\nu}] \quad (362) \end{aligned}$$

Die Summation über die Polarisationen des Z im Endzustand, siehe (291)

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^{\mu(\lambda)*}(k_1) \epsilon^{\nu(\lambda)}(k_1) = \frac{k_1^\mu k_1^\nu}{M_Z^2} - g^{\mu\nu}$$

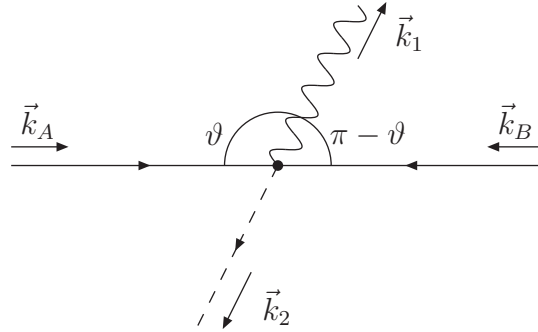
liefert:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^3 \overline{|\mathcal{M}_V|^2} &= g_H^2 \frac{M_Z^2}{(s - M_Z^2)^2} \left[\frac{k_1^\mu k_1^\nu}{M_Z^2} - g^{\mu\nu} \right] [k_{A\mu} k_{B\nu} + k_{B\mu} k_{A\nu} - k_A k_B g_{\mu\nu}] \\ &= g_H^2 \frac{M_Z^2}{(s - M_Z^2)^2} \left[2 \frac{(k_1 k_A)(k_1 k_B)}{M_Z^2} - 2k_A k_B - \frac{k_1^2}{M_Z^2} k_A k_B + 4k_A k_B \right], \quad k_1^2 = M_Z^2 \\ \sum_{\lambda=1}^3 \overline{|\mathcal{M}_V|^2} &= g_H^2 \frac{1}{(s - M_Z^2)^2} [2(k_1 k_A)(k_1 k_B) + M_Z^2 k_A k_B] \end{aligned} \quad (363)$$

Man findet: $\overline{|\mathcal{M}_V|^2} = \overline{|\mathcal{M}_A|^2}$ und $\sum_{\lambda=1}^3 \overline{|\mathcal{M}_A \mathcal{M}_V|} = 0$

Im Schwerpunktssystem schreiben wir:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} &= g_V^2 \frac{d\sigma_V}{d\Omega} + g_A^2 \frac{d\sigma_A}{d\Omega} \\ E_A &= E_B = \frac{E_{CM}}{2} = \frac{\sqrt{s}}{2}, \quad |\vec{k}_{A,B}| = E_{A,B} \end{aligned}$$



und definieren:

$$k_1 k_A = E_1 E_A - \vec{k}_1 \vec{k}_A =: E_1 E_A - |\vec{k}_1| \underbrace{|\vec{k}_A|}_{=E_A} \cos \vartheta = \frac{\sqrt{s}}{2} (E_1 - |\vec{k}_1| \cos \vartheta) \quad (364a)$$

$$\text{mit} \quad E_1 \stackrel{(355b)}{=} \frac{s + M_Z^2 - M_H^2}{2\sqrt{s}}, \quad |\vec{k}_1| \stackrel{(355b)}{=} \frac{\lambda(s, M_Z^2, M_H^2)}{2\sqrt{s}} \quad (364b)$$

$$k_1 k_B = E_1 E_B - |\vec{k}_1| E_B \cos(\pi - \vartheta) = \frac{\sqrt{s}}{2} (E_1 + |\vec{k}_1| \cos \vartheta) \quad (365)$$

$$\text{und } k_A k_B = \frac{(k_A + k_B)^2 - k_A^2 - k_B^2}{2} = \frac{s}{2} \quad (366)$$

Einsetzen von (364), (365) und (366) in (363):

$$\sum_{\lambda=1}^3 \overline{|\mathcal{M}_V|^2}_{CM} = \frac{g_H^2}{2} \frac{s}{(s - M_Z^2)^2} \left[E_1^2 - |\vec{k}_1|^2 \cos^2 \vartheta + M_Z^2 \right]$$

Schließlich: $E_1^2 = |\vec{k}_1|^2 + M_Z^2$ und

$$\sum_{\lambda=1}^3 \overline{|\mathcal{M}_V|^2}_{CM} = \frac{g_H^2}{2} \frac{s}{(s - M_Z^2)^2} \left(|\vec{k}_1|^2 \sin^2 \vartheta + 2M_Z^2 \right) \quad (367)$$

Mit (357b) (und $|\vec{k}_A| = \frac{\sqrt{s}}{2}$) also:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} &= \frac{g_H^2}{64\pi^2 (s - M_Z^2)^2} \frac{|\vec{k}_1|}{\sqrt{s}} \left(|\vec{k}_1|^2 \sin^2 \vartheta + 2M_Z^2 \right) \\ &= \frac{g_H^2}{128\pi^2 (s - M_Z^2)^2} \frac{\lambda(s, M_Z^2, M_H^2)}{s} \left[\frac{\lambda(s, M_Z^2, M_H^2)^2}{4s} \sin^2 \vartheta + 2M_Z^2 \right] \end{aligned} \quad (368)$$

und

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = g_V^2 \frac{d\sigma_V}{d\Omega} + g_A^2 \underbrace{\frac{d\sigma_A}{d\Omega}}_{=\frac{d\sigma_V}{d\Omega}} = (g_V^2 + g_A^2) \frac{d\sigma_V}{d\Omega}$$

5.4 Quantenelektrodynamik

Die Lagrangedichte der freien Dirac-Gleichung hat eine globale U(1)-Symmetrie (parametrisiert durch $\varphi \in [0, 2\pi]$)

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(-ie\varphi) \psi \quad (369)$$

$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\partial - m] \psi$ ist invariant bezüglich (369)

Noether-Ladung:

$$Q \stackrel{(104b)}{=} -e \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x) \psi(x)$$

$e \in \mathbb{R}$ ist die U(1)-Kopplung von ψ . (369) beschreibt eine innere Symmetrie, denn x wird nicht transformiert. Idee: φ abhängig von x (immernoch innere Symmetrie)

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(-ie\varphi(x)) \psi \quad (370)$$

Jedoch mit $\psi' = \exp(-ie\varphi(x)) \psi$:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}' [i\partial - m] \psi' = \bar{\psi} \exp(ie\varphi(x)) [i\partial - m] \exp(-ie\varphi(x)) \psi = \bar{\psi} [i\partial + e(\partial\varphi) - m] \psi \neq \mathcal{L} \quad (371)$$

$\Rightarrow$ (370) ist keine Symmetrie der freien Dirac-Gleichung.

Wir können jedoch $\mathcal{L}$ so erweitern, dass (370) zur Symmetrie von $\mathcal{L}$ wird:

Reelles Feld $A^\mu(x)$ und

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x) \quad (372)$$

Dann ist:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}' [i\partial' - m] \psi' = \bar{\psi}' [i\partial - eA' - m] \psi' = \bar{\psi} [i\partial - e\gamma_\mu(A'^\mu - \partial^\mu\varphi) - m] \psi \stackrel{!}{=} \mathcal{L}$$

invariant, sofern

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\varphi \quad (373)$$

gilt. Die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\partial - m] \psi \quad (374)$$

ist also invariant unter der simultanen Transformation (370), (373). (370) heißt **lokale U(1)-Transformation** oder **U(1)-Eichtransformation**. (374) ist aus der freien Dirac-Gleichung abgeleitet worden mit dem so genannten **Eichprinzip** (= Invarianz bezüglich (370)) und der Minimalität (Erweiterung nur um *ein* Feld).

Kinetischer Term für A^μ :

$$\begin{aligned} & \partial^\nu A^\mu \stackrel{(373)}{\rightarrow} \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \varphi \\ \Rightarrow & F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \stackrel{(373)}{\rightarrow} \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \end{aligned} \quad (375)$$

ist U(1)-eichinvariant.

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (376)$$

ist also ein U(1)-eichinvarianter kinetischer Term:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) \quad (377)$$

(Mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ wie beim reellen KG-Feld; Eindeutig: da z.B. $F_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 0$)

Lagrangedichte der QED:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} [i\not{D} - m] \psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (378)$$

mit A^μ = Photonfeld und der elektromagnetischen Kopplungskonstanten e . Felder mit (373) heißen **Eichfelder**. e in (372) heißt **Eichkopplung**.

Man kann Fermionfelder ψ_q mit unterschiedlicher Kopplung $e q$ an das Eichfeld definieren. Dazu definiert man den Ladungsoperator Q durch

$$Q\psi_q = q\psi_q \quad (379a)$$

und erweitert (372) zu

$$D_\mu = \partial_\mu - ieQA_\mu \quad (379b)$$

und (370) zu

$$\psi_q \rightarrow \exp(-ieQ\varphi(x))\psi_q = \exp(-ieq\varphi(x))\psi_q \quad (380)$$

Dabei ist der reelle Faktor e überflüssig, aber hilfreich, um einfache Ladungsquantenzahlen q zu erhalten:

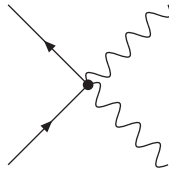
$$\begin{aligned} q = 0 & \quad \text{für Neutrinos} \\ q = -1 & \quad \text{für Elektronen} \\ q = -1/3 & \quad \text{für d,s,b - Quarks} \\ q = +2/3 & \quad \text{für u,c,t - Quarks} \end{aligned} \quad (381)$$

Dann erweitert sich $\mathcal{L}_{QED}$ zu

$$\mathcal{L}_{QED} = \sum_{\psi_q} \bar{\psi}_q [i\not{D} - m_q] \psi_q - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (382)$$

Das Eichprinzip schränkt die erlaubten Terme in $\mathcal{L}$ stark ein. Zunächst erzwingt es, dass Eichfelder Vektorfelder sind (wegen Lorentzkovarianz von D_μ in (372)). Eichsymmetrie verbietet weiter einen Massenterm für das Eichfeld: $m^2 A_\mu A^\mu$ ist nicht eichinvariant unter (373). Auch ist $\underbrace{\bar{\psi}\psi A_\mu A^\mu}_{\text{(Dimension -5)}}$ nicht eichinvariant, jedoch $\bar{\psi}D^2\psi = \bar{\psi}D_\mu D^\mu\psi = \bar{\psi}[\partial_\mu + ieA_\mu][\partial^\mu + ieA^\mu]\psi \supset$

$-e^2\bar{\psi}\psi A_\mu A^\mu$, d.h. eine hypothetische $\bar{\psi}\psi A_\mu A^\mu$ - Kopplung.



ist mit anderen Kopplungen verknüpft. Experimentelle Grenze an die Photonmasse $m_\gamma < 6 \cdot 10^{-17} \text{eV}$

Ebenso erzwingt die U(1)-Eichinvarianz, dass A_μ reell ist, mithin das Photon also keine U(1)-Ladung trägt. Experimentelle Grenze an die Photonladung $|q_\gamma| < 5 \cdot 10^{-30}$

Kommutator:

$$\begin{aligned}
 [D_\mu, D_\nu]\psi &= [\partial_\mu + ieA_\mu, \partial_\nu + ieA_\nu]\psi = ie[\underbrace{\partial_\mu A_\nu}_{=(\partial_\mu A_\nu) + A_\nu \partial_\mu} - A_\nu \partial_\mu + A_\mu \partial_\nu - \partial_\nu A_\mu]\psi \\
 &= ie[(\partial_\mu A_\nu) - (\partial_\nu A_\mu)]\psi = ieF_{\mu\nu}\psi, \quad (\text{kein Ableitungsoperator wirkt auf } \psi) \\
 \text{Salopp} \quad : \quad [D_\mu, D_\nu] &= ieF_{\mu\nu} \quad (383)
 \end{aligned}$$

In (75) hatten wir die Bewegungsgleichung des Photonfeldes berechnet (nun $j_\mu = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$) und mit

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = j^\beta \quad (384)$$

die Maxwell-Gleichungen gefunden. Die Euler-Lagrange-Gleichung fürs Dirac-Feld ergeben aus (374)

$$[i\cancel{D} - m]\psi = 0 \quad (385)$$

Aus (384) folgt allgemein:

$$0 \underset{F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}}{=} \partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\beta j^\beta$$

d.h. wir können A_μ nur an sogenannte *erhaltene Ströme*, die $\partial_\beta j^\beta = 0$ erfüllen, koppeln. Im Falle der QED ist

$$\partial_\mu j^\mu = -e\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = -e\bar{\psi}[\overleftarrow{\partial} + \overrightarrow{\partial}]\psi = -e\bar{\psi}[\overleftarrow{D} + \overrightarrow{D}]\psi \quad \text{mit } \overleftarrow{D}^\mu := \overleftarrow{\partial}^\mu - ieA^\mu \quad (386)$$

(385) impliziert:

$$\bar{\psi}[i\overleftarrow{D} + m] = 0 \quad (387)$$

Mit (385) und (387) folgt also aus (386):

$$\partial_\mu j^\mu = -e\bar{\psi}[-im + im]\psi = 0 \Rightarrow \text{Konsistenztest bestanden}$$

Ein beliebiges $j^\beta = \partial_\alpha(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)$ (75) mit $\partial_\beta j^\beta = 0$ ist im Impulsraum:

$$\begin{aligned}
 \tilde{j}^\beta &= -k_\sigma k^\sigma \tilde{A}^\beta + k_\alpha k^\beta \tilde{A}^\alpha \\
 &= -\underbrace{[k_\sigma k^\sigma g^\beta{}_\alpha - k_\alpha k^\beta]}_{\text{singulär}} \tilde{A}^\alpha \quad (388)
 \end{aligned}$$

$k_\sigma k^\sigma g^\beta{}_\alpha - k_\alpha k^\beta$ ist wie erwartet singulär, denn $\tilde{A}^\alpha$ hat ja 2 unphysikalische Freiheitsgrade:

$$k_\beta[k^2 g^\beta{}_\alpha - k_\alpha k^\beta] = 0$$

$\Rightarrow$ aus (388) ist kein Propagator zu gewinnen.

Einen unphysikalischen Freiheitsgrad können wir identifizieren und eliminieren, indem wir beobachten, dass wir A^μ der **Lorentz-Bedingung**

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (389)$$

unterwerfen können.

Mit (389) wird (75) zu

$$\square A^\beta = j^\beta \quad (390)$$

Was wegen $\partial_\beta j^\beta = 0$

$$\square \partial_\beta A^\beta = 0 \quad (391)$$

impliziert und mit (389) verträglich ist.

Insbesondere folgt aus (391): Ist (389) als Anfangsbedingung für $t = t_0$ erfüllt, (auf einer raumartigen Hyperfläche), so auch für alle anderen Zeiten t . Im Impulsraum bedeutet (389):

$$k_\mu \tilde{A}^\mu = 0 \quad (392)$$

d.h. $\tilde{A}^\mu$ hat nur Komponenten mit Polarisationen $\epsilon_\mu^{(\lambda)} k^\mu = 0$, also keine **skalare Polarisation** (die $\epsilon_\mu k^\mu \neq 0$ erfüllt)

5.4.1 Eichfixierung

Wir bauen die Bedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ mit dem Lagrange-Multiplikator $\frac{1}{2\xi}$ in die Lagrangedichte ein.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \stackrel{(377)}{=} \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (393)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A^\lambda)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\lambda} = -\partial_\rho \partial_\lambda A^\rho + \partial_\rho \partial^\rho A_\lambda + \frac{1}{\xi} g^\rho{}_\lambda \partial_\rho \partial_\mu A^\mu = \square A_\lambda + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \partial_\lambda \partial_\mu A^\mu \\ 0 &= \left[\square g_{\lambda\mu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\lambda \partial_\mu \right] A^\mu \end{aligned} \quad (394)$$

Impulsraum:

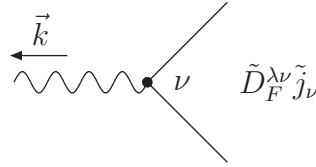
$$\left[-k^2 g_{\lambda\mu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\lambda k_\mu \right] \tilde{A}^\lambda = 0 \quad \text{freies Feld} \quad (395)$$

$$\left[-k^2 g_{\lambda\mu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\lambda k_\mu \right] \tilde{D}_F^{\lambda\nu}(k) = i\delta_\mu^\nu \quad \text{Propagator} \quad (396)$$

$$\Rightarrow \frac{-i}{k^2 + i\delta} \left[g^{\lambda\mu} - (1 - \xi) \frac{k^\lambda k^\mu}{k^2} \right] = \tilde{D}_F^{\lambda\nu}(k) \quad (397)$$

(ξ : Eichparameter)

Im Impulsraum bedeutet $\partial_\beta j^\beta = 0$ gerade $k_\beta \tilde{j}^\beta = 0$. Koppeln wir also $\tilde{D}_F^{\lambda\nu}(k)$ an einen erhaltenen Strom,



so trägt der Term $\propto (1 - \xi)$ wegen $k_\beta \tilde{j}^\beta = 0$ nicht bei.

In der Praxis benutzt man gerade diese Bedingung, dass physikalische Amplituden nicht von ξ abhängen (**Eichunabhängigkeit**) dürfen als Check einer aufwendigen Berechnung eines Matrixelements.

Beispiel in der QED:

$$\propto \bar{u}(p, s) \gamma_\mu u(p - k, s') [g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}]$$

und

$$\bar{u}(p, s) \gamma_\mu u(p - k, s') k^\mu = \underbrace{\bar{u}(p, s) [\not{p} - (\not{p} - \not{k})]}_{m \bar{u}(p, s)} \underbrace{u(p - k, s')}_{m u(p - k, s')}$$

Analog zu (287a) definieren wir

$$A_\mu = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\lambda [\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{p}) a_p^{(\lambda)} \exp(-ipx) + \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(\vec{p}) a_p^{(\lambda)\dagger} \exp(ipx)] \Big|_{p^0=E_p} \quad (398)$$

Hier kann über reelle Polarisationen $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}$ (transversal) und $\epsilon^{(3)}$ (longitudinal) summiert werden oder über $\lambda = +, -, 3$ mit

$$\epsilon^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon^{(1)} \pm i\epsilon^{(2)})$$

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}^{(1)}(\vec{p}) \vec{p} &= \vec{\epsilon}^{(2)} \vec{p} = 0 & \epsilon_0^{(1)}(\vec{p}) = \epsilon_0^{(2)} = 0 & \Rightarrow \text{transversal} \\ (\epsilon^{(1,2)})^2 &= -(\vec{\epsilon}^{(1,2)})^2 = -1 \end{aligned} \quad (399)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^{(3)}(\vec{p}) &= \frac{p_\mu}{\sqrt{2}p_0} \Rightarrow \text{longitudinal} \\ (\epsilon_\mu^{(3)}(\vec{p}))^2 &= 0, \quad (\text{anders als beim Proca-Feld}) \end{aligned} \quad (400)$$

Alle erfüllen: $p^\mu \epsilon_\mu^{(1,2,3)} = 0$, d.h. (398) erfüllt (389).

Wir müssen noch $\epsilon_\mu^{(3)}$ loswerden:

Wenn man die Summe in (398) auf $\lambda = 1, 2$ beschränkt, erzeugt A^μ nur transversale Photonen. Diese Wahl heißt **Strahlungseichung**, sie ist jedoch nicht kovariant. Bei einer Lorentz-Transformation $\epsilon_\mu^{(1,2)'} = \Lambda_\mu{}^\nu \epsilon_\nu^{(1,2)}$ hat der transformierte Polarisationsvektor im allgemeinen eine longitudinale Komponente! Um eine kovariante Quantisierungsvorschrift zu finden, führen

wir die vierte Polarisation in (398) wieder ein. Zunächst wählen wir paarweise orthogonale Polarisationsvektoren $\bar{\epsilon}_\mu^{(\lambda)}$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$ z.B.

$$\bar{\epsilon}_\mu^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\epsilon}_\mu^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\epsilon}_\mu^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\epsilon}_\mu^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und bezeichnen die Erzeuger / Vernichter mit $\bar{a}_p^{(\lambda)}, \bar{a}_p^{(\lambda)\dagger}$.

Die kanonischen Vertauschungsrelationen sind:

$$[\bar{a}_p^{(\lambda)}, \bar{a}_{p'}^{(\lambda')}] = 0, \quad [\bar{a}_p^{(\lambda)\dagger}, \bar{a}_{p'}^{(\lambda')\dagger}] = 0 \quad (401)$$

Für die letzten Vertauschungsrelationen haben wir zwei Möglichkeiten

$$\sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 [\bar{\epsilon}_\mu^{(\lambda)} \bar{a}_p^{(\lambda)}, \bar{\epsilon}_\nu^{(\lambda')} \bar{a}_{p'}^{(\lambda')\dagger}] = -g_{\mu\nu} (2\pi)^3 2E_p \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (402)$$

und die gleiche Beziehung mit umgekehrtem Vorzeichen rechts. Lorentz-Kovarianz erzwingt das Auftreten von $g_{\mu\nu}$ rechts. (402) impliziert nun (Kontraktion $\bar{\epsilon}^{\mu(s)} \bar{\epsilon}^{\nu(s')}$):

$$[\bar{a}_p^{(\lambda)}, \bar{a}_{p'}^{(\lambda')\dagger}] = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ +1 \end{array} \right\} (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'} \quad \text{für } \left\{ \begin{array}{c} \lambda = 0 \\ \lambda = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \quad (403)$$

weil $\bar{\epsilon}_\mu^{(0)} \bar{\epsilon}^{(0)\mu} = 1, \epsilon_\mu^{(j)} \epsilon^{(j)\mu} = -1, j = 1, 2, 3$. Wir rotieren nun in ein Bezugssystem mit

$$p^\mu = \begin{pmatrix} p^0 = E_p \\ 0 \\ 0 \\ p^0 \end{pmatrix} : \quad \left. \begin{array}{l} \epsilon^{(1)}(\vec{p}) = \bar{\epsilon}^{(1)}(\vec{p}) \\ \epsilon^{(2)}(\vec{p}) = \bar{\epsilon}^{(2)}(\vec{p}) \end{array} \right\} \quad (404)$$

$$\epsilon^{(3)\mu}(\vec{p}) = \frac{p^\mu}{\sqrt{2}p^0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\epsilon}^{(0)\mu} + \bar{\epsilon}^{(3)\mu}) \quad (405)$$

Der Polarisationsvektor mit **skalarer Polarisation** ist

$$\epsilon^{(0)\mu}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\epsilon}^{(0)\mu} - \bar{\epsilon}^{(3)\mu}) \quad (406)$$

Achtung: $\epsilon_\mu^{(0)} \epsilon^{(3)\mu} = 1$ (siehe [2]).

Aus $\sum_{\lambda=0}^3 \bar{\epsilon}_\mu^{(\lambda)} \bar{a}_p^{(\lambda)} = \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)} a_p^{(\lambda)}$ folgt mit (404), (405) und (406): $\bar{a}_p^{(1,2)} = a_p^{(1,2)}$ und

$$\bar{a}_p^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_p^{(3)} - a_p^{(0)}) \quad (407a)$$

$$\bar{a}_p^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_p^{(3)} + a_p^{(0)}) \quad (407b)$$

Also:

$$a_p^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{a}_p^{(0)} - \bar{a}_p^{(3)}) \quad (408a)$$

$$a_p^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{a}_p^{(0)} + \bar{a}_p^{(3)}) \quad (408b)$$

Die Kommutatoren der neuen $a_p^{(\lambda)}$ sind:

$$[a_p^{(1)}, a_{p'}^{(1)\dagger}] = [a_p^{(2)}, a_{p'}^{(2)\dagger}] = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (409a)$$

$$[a_p^{(0)}, a_{p'}^{(0)\dagger}] = [a_p^{(3)}, a_{p'}^{(3)\dagger}] = 0 \quad (409b)$$

$$[a_p^{(0)}, a_{p'}^{(3)\dagger}] = [a_p^{(3)}, a_{p'}^{(0)\dagger}] = -(2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (409c)$$

Alle anderen Kommutatoren verschwinden. Die Vertauschungsregeln für $a_p^{(1,2)}$ sind also wie die von $\bar{a}_p^{(1,2)}, \bar{a}_p^{(1,2)\dagger}$ in (403). (409) ist Lorentz-Invariant und gilt in jedem Bezugssystem. Da wir $\epsilon_\mu^{(0)} a_p^{(0)}$ in unserer Fourierdarstellung (398) beibehalten, können wir die Bedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ bzw. $k_\mu \tilde{A}^\mu(k) = 0$ nicht mehr stellen.

Lösung:

Gupta-Bleuler-Formalismus

- Für physikalische Zustände $|phys\rangle$ muss gelten:

$$a_p^{(0)} |phys\rangle = 0 \quad (410)$$

D.h. zum Photonen-Fockraum gehören nur Zustände ohne skalare Polarisation. Wegen

$$\partial_\mu A^\mu \stackrel{(398)}{=} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{i}{\sqrt{2E_p}} [-(p\epsilon^{(0)}(p))a_p^{(0)} \exp(-ipx) + (p\epsilon^{(0)*}(p))a_p^{(0)\dagger} \exp(ipx)] \Big|_{p^0=E_p}$$

gilt also:

$$\langle phys | \partial_\mu A^\mu | phys \rangle \stackrel{(410)}{=} 0 \quad (411)$$

D.h. alle Matrixelemente erfüllen die Lorentz-Bedingung. Mögliche physikalische Ein-Teilchen-Zustände sind:

$$a_p^{(1)\dagger} |0\rangle, \quad a_p^{(2)\dagger} |0\rangle, \quad a_p^{(0)\dagger} |0\rangle \quad (412a)$$

denn alle erfüllen (410), z.B.

$$a_{p'}^{(0)} a_p^{(0)\dagger} |0\rangle \stackrel{(409)}{=} a_p^{(0)\dagger} \underbrace{a_{p'}^{(0)} |0\rangle}_{=0} = 0$$

nicht jedoch $a_p^{(3)\dagger} |0\rangle$, denn

$$a_p^{(0)} a_p^{(3)\dagger} |0\rangle \stackrel{(409)}{=} -(2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') |0\rangle \Rightarrow a_p^{(3)\dagger} |0\rangle \text{ wäre skalares Photon}$$

Physikalische Vielteilchenzustände sind alle Zustände

$$a_{p_1}^{(j_1)\dagger} \dots a_{p_n}^{(j_n)\dagger} |0\rangle \quad (412b)$$

in denen kein $a_{p_j}^{(3)\dagger}$ vorkommt. Wir haben immer noch eine Polarisation zuviel und ein weiteres Problem: Die Normen der Einteilchenzustände sind wegen

$$\langle 0 | a_{p'}^{(1,2)} a_p^{(1,2)\dagger} | 0 \rangle \stackrel{(409)}{=} (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (413)$$

$$\langle 0 | a_{p'}^{(0)} a_p^{(0)\dagger} | 0 \rangle \stackrel{(409)}{=} 0 \quad (414)$$

nicht positiv definit. (413) stellt zwar sicher, dass Wellenpakete $|f\rangle$ aus transversalen Photonen $\langle f | f \rangle \geq 0$ erfüllen (wir also das richtige Vorzeichen in (402) gewählt haben), solche aus longitudinal polarisierten Photonen haben wegen (414) jedoch eine indefinite Norm. (Wegen $a_p^{(3)} a_p^{(0)\dagger} | 0 \rangle \neq 0$ ist also $a_p^{(0)\dagger} | 0 \rangle$ longitudinal polarisiert)

Der zweite Punkt des Gupta-Bleuler-Formalismus ist:

• Physikalische Zustände entsprechen Äquivalenzklassen von Vektoren des Fockraums, wobei zwei Zustände $|1\rangle, |2\rangle$ als äquivalent definiert werden ($|1\rangle \sim |2\rangle$), wenn gilt:

$$\| |1\rangle - |2\rangle \|^2 = (\langle 2 | - \langle 1 |)(|1\rangle - |2\rangle) = 0 \quad (415)$$

Man verifiziert mit (414) die Transitivität, also dass $|1\rangle \sim |2\rangle$ und $|2\rangle \sim |3\rangle$ auch $|1\rangle \sim |3\rangle$ impliziert. Einfacher: Die zu (412b) äquivalenten Zustände erhält man durch alle Substitutionen $a_p^{(j)\dagger} \rightarrow a_p^{(j)\dagger} + \lambda a_{p'}^{(0)\dagger}$ und mithin gilt: $a_{p_1}^{(j_1)\dagger} \dots a_{p_j}^{(j_j)\dagger} \dots a_{p_n}^{(j_n)\dagger} | 0 \rangle \sim 0$ und der so definierte Hilbertraum ist positiv definit, denn aus $\| |f\rangle \| = 0$ folgt $|f\rangle \sim 0$

Beispiel:

$$j = 1, 2 : |\vec{p} \epsilon^{(j)}\rangle = a_p^{(j)\dagger} | 0 \rangle \sim (a_p^{(j)\dagger} + a_p^{(0)\dagger}) | 0 \rangle$$

• Norm:

$$\begin{aligned} \langle 0 | (a_{p'}^{(j)} + a_{p'}^{(0)}) (a_p^{(j)\dagger} + a_p^{(0)\dagger}) | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{p'}^{(j)} a_p^{(j)\dagger} + \underbrace{a_{p'}^{(0)} a_p^{(j)\dagger} + a_{p'}^{(j)} a_p^{(0)\dagger}}_{\text{vertauschen und } a_{p'}^{(0,j)} | 0 \rangle = 0} + \underbrace{a_{p'}^{(0)} a_p^{(0)\dagger}}_{=0 \text{ (414)}} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a_{p'}^{(j)} a_p^{(j)\dagger} | 0 \rangle \end{aligned}$$

• Lorentz-Kovarianz:

$$k'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu, \quad \epsilon^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\epsilon} \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{\epsilon} \vec{k} = 0 \text{ (also transversal).}$$

Ansatz:

$$\epsilon^{\mu'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\epsilon}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta^0 \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{\epsilon}' \vec{k}' = 0, \vec{\eta}' \uparrow \vec{k}'$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu'} k'_\mu &= \epsilon^\mu k_\mu = 0 \Rightarrow 0 = \eta^0 E'_k - \vec{\eta} \vec{k}' = \eta^0 E'_k - \underbrace{|\vec{\eta}| |\vec{k}'|}_{E'_k} \\ &= E'_k (\eta^0 - |\vec{\eta}|) \Rightarrow \eta^0 = |\vec{\eta}| \text{ und } \vec{\eta} = \frac{\eta^0}{E'_k} \vec{k}' \end{aligned}$$

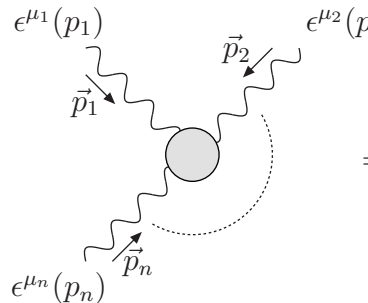
$\Rightarrow \epsilon^{\mu'}$ ist nicht transversal, der Zusatzterm ist (im Bezugssystem mit $\vec{k}' = (0 \ 0 \ E'_k)^\top$) gerade:

$$\begin{pmatrix} \eta^0 \\ \frac{\eta^0}{E'_k} \vec{k}' \end{pmatrix} = \eta^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \eta^0 \epsilon^{(3)\mu}(\vec{k}')$$

und $|p(\epsilon^{\mu} + \eta^0 \sqrt{2} \epsilon^{(3)\mu})\rangle = |p \epsilon^{\mu}\rangle + \eta^0 \sqrt{2} \epsilon^{(3)\mu} a_p^{(0)\dagger} |0\rangle \sim |p \epsilon^{\mu}\rangle$

$\Rightarrow$ Die Äquivalenzklassen sind wirklich Lorentzinvariant (für Einteilchenzustände gezeigt)

Um die Konsistenz des Gupta-Bleuler-Formalismus zu beweisen, muss weiter gezeigt werden, dass die Ersetzung $\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^\mu + \lambda \epsilon^{(3)\mu}$ auch die Matrixelemente nicht verändert:



$$= \mathcal{M} =: \epsilon^{\mu_1}(p_1) \cdots \epsilon^{\mu_n}(p_n) \mathcal{M}_{\mu_1 \dots \mu_n}$$

Invarianz unter $\epsilon^{\mu_j}(p_j) \rightarrow \epsilon^{\mu_j}(p_j) + \lambda \epsilon^{(3)\mu_j}(p_j)$ erfordert:

$$\epsilon^{(3)\mu_j}(p_j) \mathcal{M}_{\mu_1 \dots \mu_n} = 0 \text{ für } j = 1 \dots n \quad (416)$$

Wegen $\epsilon^{(3)\mu} \propto p_j^\mu$ ist hinreichend, dass gilt:

$$p^{\mu_j} \mathcal{M}_{\mu_1 \dots \mu_n} = 0 \quad (417)$$

Dies ist auch tatsächlich erfüllt. (417) heißt **(QED-)Ward-Identität**, die wir später beweisen werden.

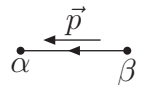
5.4.2 Feynman-Regeln der QED

- Photon-Propagator (siehe (397)):



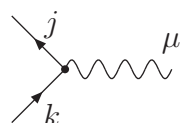
$$\frac{-i}{k^2 + i\delta} \left[g^{\alpha\beta} - (1 - \xi) \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \right] \quad (418)$$

- Fermion-Propagator (siehe 5.2):



$$\frac{i [\not{p} + m]_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\delta} \quad (419)$$

- Fermion-Photon Vertex:



$$iq_f e [\gamma_\mu]_{jk} \quad (420)$$

q_f : Fermionladung, $q_f = -1$ für das Elektron, $e = 0,3$ = elektromagnetische Kopplungskonstante $\frac{e^2}{4\pi} = \alpha_{QED} = \frac{1}{137}$

- Externe Photonen (siehe (295)):

$$\begin{array}{lcl}
 \text{einlaufend} & \begin{array}{c} \text{wavy line with arrow pointing right} \\ \text{label } \mu \text{ at the start} \end{array} & \epsilon_\mu(p) \\
 & & \\
 \text{auslaufend} & \begin{array}{c} \text{wavy line with arrow pointing right} \\ \text{label } \mu \text{ at the end} \end{array} & \epsilon_\mu^*(p)
 \end{array}
 \quad (421)$$

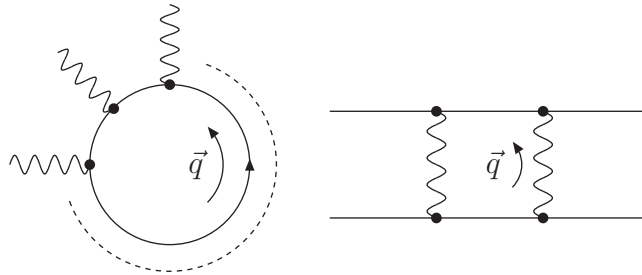
(mit transversalen ϵ_μ , Addition von $\epsilon_\mu \propto p_\mu$ erlaubt)

- Externe Fermionen (siehe 5.2):

	Fermion	Antifermion
einlaufendes	$\begin{array}{c} \text{arrow pointing down-right} \\ \text{label } \beta, s \text{ at the start} \\ u_\beta^s(\vec{p}) \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{arrow pointing down-right} \\ \text{label } \alpha, s \text{ at the start} \\ \bar{v}_\alpha^s(\vec{p}) \end{array}$
auslaufendes	$\begin{array}{c} \text{arrow pointing up-right} \\ \text{label } \alpha, s \text{ at the end} \\ \bar{u}_\alpha^s(\vec{p}) \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{arrow pointing up-right} \\ \text{label } \beta, s \text{ at the end} \\ v_\beta^s(\vec{p}) \end{array}$

(422)

- Die Regeln für das globale Vorzeichen und der Faktor -1 für geschlossene Fermionlinien gelten natürlich wie bei der Yukawa-Theorie. Ebenso: $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$ für jede Schleife.

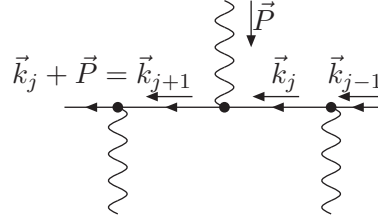


5.4.3 Diagrammatischer Beweis der Ward-Identität

$$\begin{array}{c} \text{diagram of a circle with wavy lines } \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \text{ and arrows} \end{array}
 = \mathcal{M} = \epsilon^{\mu_1}(p_1) \cdots \epsilon^{\mu_n}(p_n) \mathcal{M}_{\mu_1 \dots \mu_n}$$

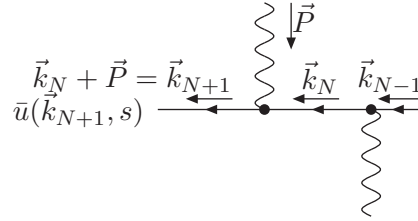
Wir betrachten ein externes Photon mit (μ, P) . Jedes Photon endet an einer Fermionlinie. Es treten 4 Fälle auf:

1.



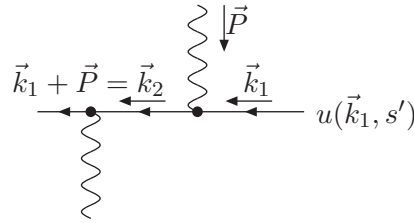
(423)

2.



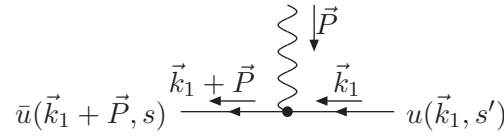
(424)

3.



(425)

4.



(426)

Zu $\mathcal{M}$ tragen alle unterschiedlichen Feynman-Diagramme mit gleicher Zahl externer Photonen bei. $p^\mu \mathcal{M}_{\mu_1 \dots \mu_n}$ umfasst also für $1 < j < N - 1$ außer

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: } \vec{k}_{j+3} \leftarrow \vec{k}_{j+2} \leftarrow \vec{k}_{j+1} = \vec{k}_j + \vec{P} \leftarrow \vec{k}_j \leftarrow \dots \\
 & \quad \text{(wavy lines at } \vec{k}_{j+3}, \vec{k}_{j+2}, \vec{k}_{j+1}, \vec{k}_j \text{)} \\
 & = \dots \frac{i[\not{k}_{j+1} + m]}{k_{j+1}^2 - m^2} (-ie) \gamma_\mu \frac{i[\not{k}_j + m]}{k_j^2 - m^2} P^\mu \not{P} = \not{k}_{j+1} - m - (\not{k}_j - m) \dots = \dots e \left[\frac{i[\not{k}_j + m]}{k_j^2 - m^2} - \frac{i[\not{k}_{j+1} + m]}{k_{j+1}^2 - m^2} \right] \dots \\
 & = e \left[\text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} \right] \quad \text{mit fiktivem } \text{---} \bullet \text{---} \text{Vertex} \quad (427)
 \end{aligned}$$

auch die Diagrammklasse:

$$\begin{aligned}
 &= \dots e \left[\frac{i[\not{k}_{j+1} + m]}{k_{j+1}^2 - m^2} - \frac{i[\not{k}_{j+2} + m]}{k_{j+2}^2 - m^2} \right] \dots \\
 &= e \text{ --- } -e \text{ --- } \text{wie in (427)} \quad (428)
 \end{aligned}$$

Aus der Summe aus (427) und (428) fällt der Propagator

$$\frac{i[\not{k}_{j+1} + m]}{k_{j+1}^2 - m^2}$$

heraus. Summieren wir für den Fall einer offenen Fermionlinie mit N Vertizes alle Diagramm-
klassen für $j = 2, \dots, N-2$, so findet man

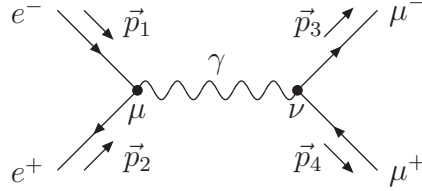
$$\bar{u}(\vec{k}_{N+1}, s) \text{ --- } \dots \text{ --- } u(\vec{k}_1, s') \quad (429)$$

Die Diagrammklasse (424) gibt gerade:

In jedem Feynman-Diagramm dürfen wir also $\epsilon^{\mu_j}(p_j)$ durch $\epsilon^{\mu_j}(p_j) + \epsilon^{(3)\mu_j}(p_j)$ (wegen $\epsilon^{(3)\mu_j}(p_j) \propto p_j^{\mu_j}$) ersetzen.
 $\Rightarrow$ Gupta-Bleuler-Formalismus ist konsistent.

5.4.4 Anwendung: Myon-Paarproduktion in e^+e^- – Kollisionen

QED-Prozess:



Wir berechnen den unpolarisierten Streuquerschnitt. Nützliche Abkürzung:

$$\text{Elektron-Spinor } e(k, s) \equiv u(k, s) \quad (434a)$$

$$\text{Positron-Spinor } e(-k, s) \equiv v(k, s) \quad (434b)$$

D.h. $e(k, s)$ beschreibt ein Elektron mit Impuls $\vec{k}$, wenn $k^0 = E_k > 0$ und ein Positron mit Impuls $-\vec{k}$, wenn $k^0 = -E_k < 0$:

$$\begin{array}{cc} k^0 > 0 & k^0 < 0 \\ \hline \overrightarrow{k} & \overleftarrow{k} \end{array}$$

Vorteil: $\vec{k}$ fließt immer mit der Fermionzahl, und

$$\left. \begin{array}{l} \not{k}e(k, s) = me(k, s) \\ \bar{e}(k, s)\not{k} = m\bar{e}(k, s) \end{array} \right\} \text{ für } e^+ \text{ und } e^-$$

Polarisationssumme:

$$\sum_s e(k, s)\bar{e}(k, s) = \text{sgn } k^0 \cdot [\not{k} + m] \quad (435)$$

Vernachlässige m_e und m_μ : Mit (418) bis (422) erhält man:

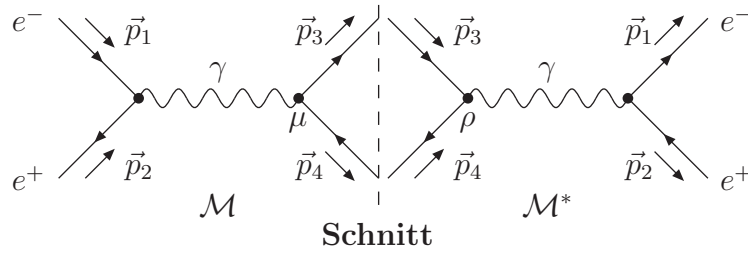
$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{e}(-p_2, s_2)(-ie)\gamma^\mu e(p_1, s_1) \\ &\quad \frac{-i}{(p_1 + p_2)^2} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{(p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)_\nu}{(p_1 + p_2)^2} \right] \\ &\quad \bar{\mu}(p_3, s_3)(-ie)\gamma^\nu \mu(-p_4, s_4) \\ &= \frac{ie^2}{s} \bar{e}(-p_2, s_2)\gamma^\mu e(p_1, s_1) \bar{\mu}(p_3, s_3)\gamma_\mu \mu(-p_4, s_4) \end{aligned}$$

mit $s = (p_1 + p_2)^2$. Der Term $\propto 1 - \xi$ verschwindet wegen

$$\underbrace{\bar{e}(\not{p}_2)}_{=0} + \underbrace{\not{p}_1 e}_{=0} = 0$$

$$\mathcal{M}\mathcal{M}^* = \frac{e^4}{s^2} \bar{e}(-p_2, s_2)\gamma^\mu e(p_1, s_1) \bar{\mu}(p_3, s_3)\gamma_\mu \mu(-p_4, s_4) \bar{\mu}(-p_4, s_4)\gamma_\rho \mu(p_3, s_3) \bar{e}(p_1, s_1)\gamma^\rho e(-p_2, s_2) \quad (436)$$

graphisch:



Der Schnitt kennzeichnet den Endzustand.

$\mathcal{M}^*$: gespiegeltes Feynman-Diagramm + Fermionenzahlfluss und Impulsfluss umgedreht.

$\Rightarrow \mathcal{M}\mathcal{M}^* =$ erlaubtes Diagramm (Endzustandslinien verbunden)

Feynman-Regel für $\mathcal{M}$: (gilt immer, nicht nur für die QED)

Das Diagramm zu $\mathcal{M}\mathcal{M}^*$ wird mit den üblichen Feynman-Regeln berechnet (jedoch wird bei den geschnittenen Propagatoren kein Faktor $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$ mitgegeben. Die Polarisationssumme über s_3, s_4 in (436) ergibt gerade: ($m_\mu \neq 0$):

$$\text{tr}(\gamma_\mu(-\not{p}_4 + m_\mu)\gamma_\rho(\not{p}_3 + m_\mu)) \underbrace{(-1)}_{\text{wegen (435)}} \quad (437)$$

Die Feynman-Regel für Fermionschleifen liefert auch den Faktor (-1) und die Spur (437).

Jedoch ist der volle Feynman-Propagator $\frac{\not{p} + m_\mu}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$ für $p = p_3, -p_4$. Damit finden wir $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ viel schneller (nun für $m_\mu = m_e = 0$):

$$\begin{aligned} \sum_{s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{s^2} (-1) \text{tr}(\gamma_\mu(-\not{p}_4)\gamma_\rho\not{p}_3) \bar{e}(-p_2, s_2)\gamma^\mu e(p_1, s_1) \bar{e}(p_1, s_1)\gamma^\rho e(-p_2, s_2) \\ \text{und } |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \sum_{s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \text{tr}(\gamma_\mu\not{p}_4\gamma_\rho\not{p}_3) \text{tr}(\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\rho\not{p}_1) \end{aligned} \quad (438)$$

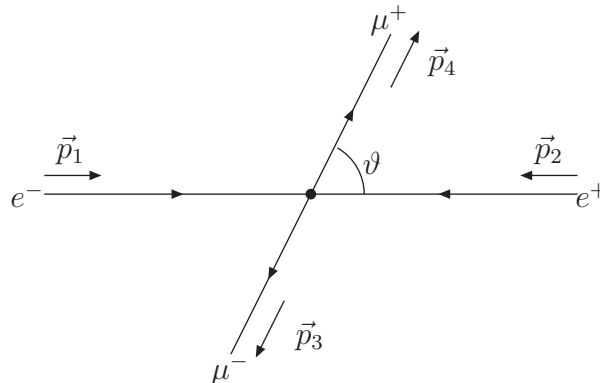
denn

$$\sum_{s_1, s_2} \bar{e}(-p_2, s_2)\gamma^\mu e(p_1, s_1) \bar{e}(p_1, s_1)\gamma^\rho e(-p_2, s_2) = \text{tr}(\gamma^\rho\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_1) = \text{tr}(\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\rho\not{p}_1)$$

Die Spuren berechnen sich zu

$$\mathcal{T} = \text{tr}(\gamma_\mu\not{p}_4\gamma_\rho\not{p}_3) \text{tr}(\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\rho\not{p}_1) = 32 [(p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4)] \quad (439)$$

Schwerpunktssystem:



$$p_1 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ -E \end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix} E \\ E \sin \vartheta \\ 0 \\ -E \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad p_4 = \begin{pmatrix} E \\ -E \sin \vartheta \\ 0 \\ E \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad s = 4E^2$$

$$\mathcal{T} = 2s^2 [(1 - \cos \vartheta)^2 + (1 + \cos \vartheta)^2] = 4s^2(1 + \cos^2 \vartheta) \quad (440)$$

Einsetzen in (438)

$$\sum_{s_3, s_4} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = e^4(1 + \cos^2 \vartheta) \quad (441)$$

Mit (358) finden wir für den unpolarisierten Streuquerschnitt)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2 s} = \frac{e^4}{64\pi^2 s} (1 + \cos^2 \vartheta) = \frac{\alpha^2}{4} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{s} \quad \text{mit } \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad (442)$$

Die Integration über φ liefert:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos \vartheta} \right)_{CM} = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{\alpha^2 \pi}{2} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{s} \quad (443)$$

Wir können uns die Winkelverteilung auch in Form von Kugelflächenfunktionen ansehen:
Winkelverteilung in (443)

$$1 + \cos^2 \vartheta = 4\pi \underbrace{|Y_0^0(\vartheta, \varphi)|^2}_{l=0, \text{ s-Welle}} + \frac{4\pi}{3} \underbrace{|Y_1^0(\vartheta, \varphi)|^2}_{l=1, \text{ p-Welle}}$$

Virtuelles Photon: Spin 1 $\Rightarrow \mu^+ \mu^-$ - Paar in $j = 1$ Zustand ergibt zwei Möglichkeiten:

- $l = 0$ und $s = 1$
- $l = 1$ und $s = 0$

(s : Gesamtspin des $\mu^+ \mu^-$ - Systems)

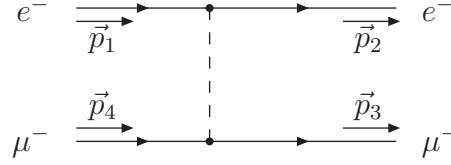
Beim Austausch eines skalaren Teilchens (Higgs, ...) würde man keine ϑ Abhängigkeit finden, den $j = 0$ impliziert $s = 0, l = 0$ und das $\mu^+ \mu^-$ - Paar ist in einer s-Welle:

$$\mathcal{T} \rightarrow \text{tr}(\not{p}_4 \not{p}_3) \text{tr}(\not{p}_2 \not{p}_1) = 16(p_1 p_2) (p_3 p_4) = 4s^2 \Rightarrow \text{isotrop}$$

5.4.5 Crossing-Symmetrie

Beispiel:

$$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^- \quad (444)$$

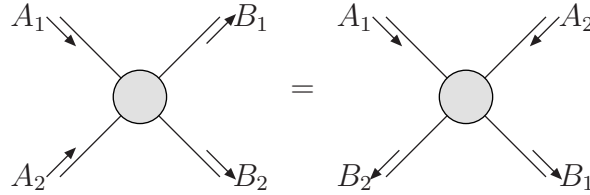


Einzigster Unterschied zu $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ist $p_2 \rightarrow -p_2$, $p_3 \rightarrow -p_3$ wobei auch $\bar{e}(-p_2, s_2) \rightarrow \bar{e}(p_2, s_2)$ und $\bar{\mu}(-p_4, s_4) \rightarrow \bar{\mu}(p_4, s_4)$ ersetzt wird (vgl. 434). Die Polarisationssumme (435) hat wegen $\text{sgn } p_1^0 = \text{sgn } p_2^0 = \text{sgn } p_3^0 = \text{sgn } p_4^0 = 1$ nun keinen Faktor (-1) . Die Berechnung eines Prozesses, bei dem Teilchen im Anfangszustand durch Teilchen im Endzustand ausgetauscht werden, z.B. $A\bar{C} \rightarrow \bar{B}D$ oder $A \rightarrow \bar{B}CD$ aus $AB \rightarrow CD$ ($\bar{C}, \bar{B}$ Antiteilchen zu C, B) heißt **Crossing**.

Crossing-Symmetrie

$$\mathcal{M}(A_1 \dots A_n \rightarrow B_1 \dots B_m) = (-1)^f \mathcal{M}(A_1 \dots A_k \rightarrow \bar{A}_{k+1}, \dots, \bar{A}_n, B_1 \dots B_m) \quad (445)$$

wobei f die Zahl der (Anti-)Fermionen ist, die vom Anfangs- in den Endzustand gekreuzt wurden. (445) ist so zu verstehen, dass die Impulsrichtungen in beiden Matrixelementen gleich sind.

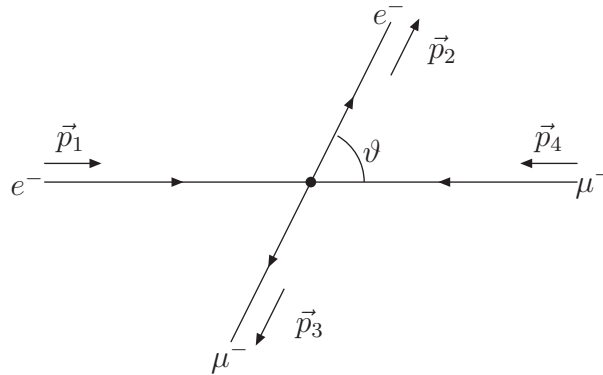


D.h. der physikalische Impuls eines gekreuzten Teilchens mit Impuls p ist $-p$. Also impliziert (445) die analytische Fortsetzung von $p^0 < 0$ nach $p^0 > 0$.

Das Matrixelement zu $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ kann man also aus (438),(439) ablesen:

$$\sum_s |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \sum_s |\overline{\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}|^2 = \frac{e^4}{t^2} \frac{1}{4} 32 [(p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4)] \quad (446)$$

wobei $t := (p_2 - p_1)^2$ nun den Impulsübertrag vom e^- auf das μ^- bezeichnet. Die Kinematik ist nun anders als bei $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$:



p_1 und p_3 wie in $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Aber p_2 ist mit p_4 vertauscht:

$$p_1 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} E \\ -E \sin \vartheta \\ 0 \\ E \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix} E \\ E \sin \vartheta \\ 0 \\ -E \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad p_4 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ -E \end{pmatrix}$$

z.B.

$$t = (p_2 - p_1)^2 = (E_2 - E_1)^2 - (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2 = -E^2[\sin^2 \vartheta + (\cos \vartheta - 1)^2] = -2E^2(1 - \cos \vartheta)$$

Setzt man alle Skalarprodukte ein, so findet man (mit $s = (p_1 + p_2)^2$)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{\alpha^2}{2s(1 - \cos \vartheta)^2} (4 + (1 + \cos \vartheta)^2) \quad (447)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos \vartheta} \right)_{CM} = \frac{\pi\alpha^2}{s(1 - \cos \vartheta)^2} (4 + (1 + \cos \vartheta)^2) \quad (448)$$

$\Rightarrow$ andere Winkelverteilung als in (443)

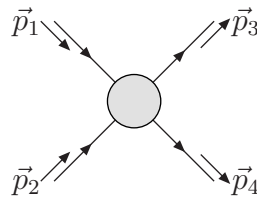
$\left(\frac{d\sigma}{d\cos \vartheta} \right)_{CM}$ wird singular für $\vartheta \rightarrow 0$ wie

$$\frac{d\sigma}{d\cos \vartheta} \stackrel{\vartheta \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{\vartheta^4} \quad (449)$$

(Nennt man auch collineare Divergenz)

D.h. Streuprozesse, bei denen sich die Teilchen fast verfehlen (schleifende Kollisionen, „glancing collisions“) sind begünstigt. „Beliebig kleine Impulsüberträge passieren beliebig oft“. Das Verhalten in (449) ist Folge der Massenlosigkeit des Photons, also der Langreichweitigkeit der elektromagnetischen Wechselwirkung (- dem Coulomb-Potential kann man nicht entkommen).

In einer $2 \rightarrow 2$ Streuung



heißen

$$s = s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad (450a)$$

$$t = s_{13} = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \quad (450b)$$

$$\text{und } u = s_{23} = (p_2 - p_3)^2 = (p_1 - p_4)^2 \quad (450c)$$

Mandelstam-Variablen (vgl (333)). Drücken wir die unpolarisierten Matrixelemente durch s, t, u aus, so bedeutet die Crossing-Symmetrie gerade

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}(s, t, u) = \overline{|\mathcal{M}|^2}(t, u, s) = \overline{|\mathcal{M}|^2}(u, s, t) = \dots \text{ usw.} \quad (451)$$

was man an (438)/(439) und (446) überprüfen kann.

Für beliebige Teilchenmassen $m_1, \dots, m_4$ gilt:

$$s + t + u \stackrel{(336)}{=} m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (452)$$

Dabei ist immer $s > 0$

Für $m_1 = m_3$ (oder $m_2 = m_4$) ist $t < 0$

und für $m_1 = m_4$ (oder $m_2 = m_3$) ist $u < 0$

In realistischen Hochenergiekollisionen ist $t < 0$ und $u < 0$:

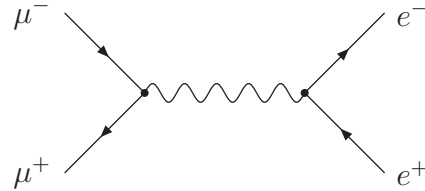
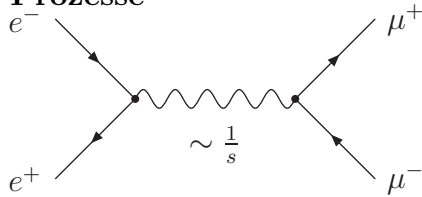
Im Ruhesystem von Teilchen 1:

$$t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 p_3 \stackrel{RS}{=} (m_1^2 + m_3^2) - 2m_1 E_1 = (m_1 - m_2)^2 + 2m_1(m_3 - E_3) < 0$$

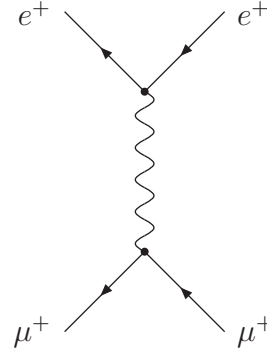
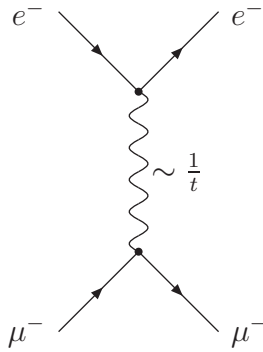
Für sehr kleine $|\vec{p}_3|$ geht $E_3 \simeq m_3 + O(|\vec{p}_3|^2)$ gegen m_3 und t kann positiv werden, sofern $m_1 \neq m_3$ (und $m_2 \neq m_4$), d.h. der Impulsübertrag $|\vec{p}_3|$ muss klein sein, damit $t > 0$ ist. Kollisionen mit kleinem Impulsübertrag sind jedoch uninteressant.

Die durch Crossing aus $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ gewonnenen Prozesse klassifiziert man auch als

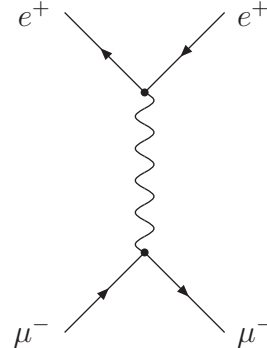
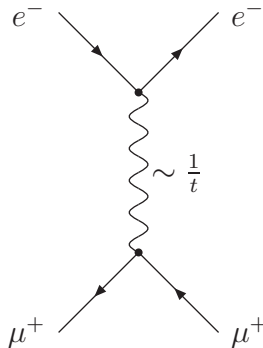
s - Kanal Prozesse



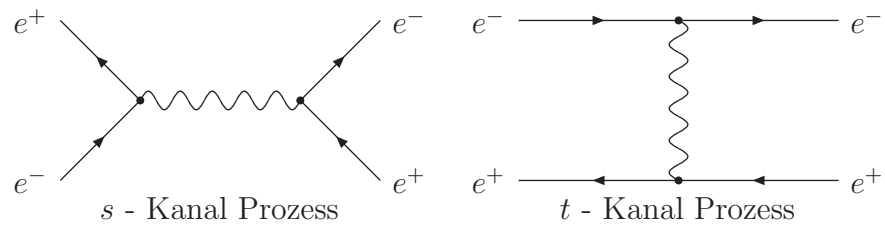
t - Kanal Prozesse



u - Kanal Prozesse



Beispiel: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$



(siehe auch [2])

6 Das Standardmodell

Elektroschwache Wechselwirkung (Glashow-)Salam-Weinberg-Modell

Stephen Weinberg: „*A Modell of Leptons*“ (Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967))

Abdus Salam: „*Weak and electromagnetic interactions*“ (1968)

Vorläufer:

Sheldon Lee Glashow: „*Partial symmetries of weak interactions*“ (Nucl. Phys 22, 579-91, (1961))

Nobelpreis 1979: Weinberg, Salam, Glashow

Starke Wechselwirkung Quantenchromodynamik (QCD)

Harald Fritzsch, Murray Gell-Mann: „*Current Algebra: Quarks and What Else?*“ (1972)

David J. Gross, Frank Wilczek: „*Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories*“ (Phys. Rev. Lett. 30, 1343 - 1346 (1973))

H. David Politzer: „*Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?*“ (Phys. Rev. Lett. 30, 1346 - 1349 (1973))

Nobelpreis 2004: Gross, Wilczek, Politzer

Das GSW-Modell und die QCD sind **nichtabelsche Eichtheorien**. Das solche Theorien sinnvolle Quantenfeldtheorien sind, wurde gezeigt in:

Gerard 't Hooft, Martinus J. G. Veltman: „*Regularization and renormalization of gauge fields*“ (Nucl. Phys. B44: 189-213 (1972)) (Nobelpreis 1999)

6.1 Nichtabelsche Eichtheorien

Die **Lie-Gruppe** $SU(N)$, $N \geq 2$ ist definiert als:

$$SU(N) = \{U \in \mathbb{C}^{N \times N} : U^\dagger U = 1 \wedge \det U = 1\}$$

Jede $U \in SU(N)$ lässt sich schreiben als:

$$U = \exp(i\lambda_a T^a) \text{ mit } \lambda_a \in \mathbb{R}, T^a = T^{a\dagger} \text{ und } \text{tr} T^a = 0 \quad (453)$$

Die **Generatoren** T^a bilden die **Lie-Algebra** $SU(N)$

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c \quad (454a)$$

Die f^{abc} heißen **Strukturkonstanten**. Die Zahl der linear unabhängigen T^a ist die **Dimension** der Lie-Algebra bzw. Lie-Gruppe und ist gleich

$$N^2 - 1 \quad (454b)$$

Eine Lie-Gruppe ist **nichtabelsch** (= **nichtkommutativ**), wenn mindestens ein $f^{abc} \neq 0$ ist. $SU(N)$ ist daher nichtabelsch!

Die Normierung der $SU(N)$ -Generatoren kann man so wählen, dass gilt:

$$\text{tr}(T^a T^b) \propto \delta^{ab} \quad (454c)$$

Aus $[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0$ und (454a) folgt die **Jacobi-Identität**

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0 \quad (455)$$

Jeder Satz von $N^2 - 1$ $M \times M$ Matrizen T_r^a , der (454a) erfüllt, bildet eine **Darstellung** von $SU(N)$. Für jede Darstellung der $SU(N)$ kann durch unitäre Transformation der T_r^a erzielt werden, dass alle T_r^a Blockdiagonalgestalt haben:

$$T_r^a = \begin{pmatrix} T_r^{a(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_r^{a(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_r^{a(n)} \end{pmatrix}$$

Gibt es nur einen solchen Block, so heißt die Darstellung **irreduzibel**. Mit $U^\dagger U = 1$ bilden $T^{a'} = U^\dagger T^a U$ eine Darstellung der $SU(N)$. $T^{a'}$ und T^a heißen äquivalent.

$$\text{tr}(T_r^a T_r^b) =: C(r) \delta^{ab} \quad (456)$$

definiert den **Dynkin-Index** $C(r)$. Aus (454a) folgt

$$\begin{aligned} [T_r^a, T_r^b] T_r^c &= i f^{abd} T_r^d T_r^c \stackrel{(456)}{\Rightarrow} i f^{abc} C(r) = \text{tr}([T_r^a, T_r^b] T_r^c) \\ \Rightarrow f^{abc} &= -\frac{i}{C(r)} \text{tr}([T_r^a, T_r^b] T_r^c) = -\frac{i}{C(r)} (\text{tr}(T_r^a T_r^b T_r^c) - \text{tr}(T_r^b T_r^a T_r^c)) \end{aligned} \quad (457a)$$

$\Rightarrow f^{abc}$ ist *total antisymmetrisch*

Für die definierende Darstellung $r = N$ der $SU(N)$ wählt man:

$$C(N) = \frac{1}{2} \quad (457b)$$

Eine Darstellung hat die Dimension $d(r) = M$, wenn sie aus $M \times M$ Matrizen besteht. Die definierende Darstellung der $SU(N)$ hat Dimension N . Die **adjungierte Darstellung** wird mit $r = G$ bezeichnet und ist durch die Matrizen

$$[T_G^b]_{ac} = i f^{abc} \quad (458)$$

gegeben. Das die T_G^a eine Darstellung bilden, folgt aus der Jacobi-Identität (455) und $f^{abc} = -f^{bac}$

$$\begin{aligned} [T_G^b, T_G^c]_{ae} &= T_{Gad}^b T_{Gde}^c - T_{Gad}^c T_{Gde}^b \stackrel{(458)}{=} -f^{abd} f^{dce} + f^{acd} f^{dbe} \\ &= f^{cde} f^{abd} + f^{bde} f^{cad} \stackrel{(455)}{=} -f^{ade} f^{bcd} = i f^{bcd} i f^{ade} = i f^{bcd} T_{Gae}^d \\ \Rightarrow [T_G^b, T_G^c] &= i f^{bcd} T_G^d \end{aligned} \quad (459)$$

Es ist

$$d(G) = N^2 - 1 \quad (460)$$

Die Matrix $T^a T^a$ vertauscht mit allen Generatoren:

$$[T^b, T^a T^a] = T^a [T^b, T^a] + [T^b, T^a] T^a = i f^{bac} T^a T^c + i f^{bac} T^c T^a = 0$$

Matrizen, die diese Eigenschaft haben, heißen **Casimir-Operatoren**. Das **Schursches Lemma** besagt, dass für eine irreduzible Darstellung jeder **Casimir-Operator** proportional zur Einheitsmatrix ist:

$$T_r^a T_r^a =: C_2(r) \mathbf{1}_{r \times r} \quad (461)$$

Beispiel: Drehimpuls $[J^2, J_i] = 0 \Rightarrow J^2 = j(j+1) \mathbf{1}$ für irreduzible Darstellungen

Die Zahl $C_2(r)$ wird wie $T_r^a T_r^a$ als **quadratischer Casimir-Operator** bezeichnet.

Aus (456) folgt

$$\begin{aligned} C_2(r) d(r) &= C_2(r) \operatorname{tr} \mathbf{1}_{r \times r} \stackrel{(461)}{=} \operatorname{tr}(T_r^a T_r^a) \stackrel{(456)}{=} C(r) \delta^{ab} \delta^{ab} \stackrel{(454b)}{=} C(r) (N^2 - 1) \stackrel{(460)}{=} C(r) d(G) \\ &\Rightarrow C_2(r) = \frac{d(G)}{d(r)} C(r) \end{aligned} \quad (462)$$

womit wir $C_2(r)$ für alle Darstellungen aus dem Dynkin-Index $C(r)$ ausrechnen können.

SU(2): Definierende Darstellung zu $j = 1/2$

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad (\sigma^a: \text{Pauli-Matrizen}) \quad (463)$$

$$[T^a, T^b] = \frac{1}{4} [\sigma^a, \sigma^b] = \frac{2i}{4} \varepsilon^{abc} \sigma^c = i \varepsilon^{abc} \frac{\sigma^c}{2} \quad (464)$$

$\Rightarrow$ Strukturkonstanten sind ε_{abc}

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T^a T^b) &= \frac{1}{4} \operatorname{tr}(\sigma^a \sigma^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \\ &\Rightarrow C(2) = \frac{1}{2} \quad (\text{Dynkin-Index}) \end{aligned}$$

Adjungierte Darstellung:

$$T_{Gac}^b = i \varepsilon^{abc} \quad (465)$$

$$\begin{aligned} T_G^1 &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} \text{ usw.} \\ d(G) &= 3 = \dim \text{SU}(2) \end{aligned}$$

Das ist die $j = 1$ Darstellung, die ein Vektorfeld beschreibt. Mit (462) finden wir

$$C_2(G) = \frac{3}{2} \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad (466)$$

6.1.1 Allgemeine Aussagen über SU(N):

$$\begin{aligned} C(N) &= \frac{1}{2}, \quad d(N) = N, \quad d(G) = N^2 - 1 \\ \stackrel{(462)}{\Rightarrow} C_2(N) &= \frac{N^2 - 1}{2N} \end{aligned} \quad (467)$$

Oft bezeichnet man

$$C_f := C_2(N) \quad (468)$$

Nützliche Beziehung für $r = N$:

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (469)$$

Beweis:

$$X_{kl}^{(ij)} := \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{kl}$$

ist hermitesch mit

$$\text{tr } X^{(ij)} = X_{kk}^{(ij)} = \frac{1}{2} \delta_{ij} - \frac{1}{2N} \delta_{ij} \underbrace{\delta_{kk}}_{=N} = 0$$

$\Rightarrow X^{(ij)}$ lässt sich schreiben als $X^{(ij)} = \lambda^a T^a$ und

$$\frac{1}{2} \lambda^a \stackrel{(456)}{=} \lambda^b \text{tr}(T^b T^a) = \text{tr}(X^{(ij)} T^a) = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl}) T_{lk}^a = \frac{1}{2} T_{ij}^a - \frac{1}{2N} \delta_{ij} \text{tr } T^a \Rightarrow \lambda^a = T_{ij}^a$$

Adjungierte Darstellung:

$$\begin{aligned} C(G) \delta^{ab} &\stackrel{(456)}{=} \text{tr}(T_G^a T_G^b) \stackrel{(458)}{=} -f^{cad} f^{dbc} \\ C_2(G) \delta^{ab} &\stackrel{(461)}{=} T_{Gad}^c T_{Gdb}^c \stackrel{(458)}{=} -f^{acd} f^{dcb} \end{aligned} \quad (470)$$

$\Rightarrow C(G) = C_2(G)$ im Einklang mit (462). Berechnung von $C_2(G)$ mit Hilfe von (469):

$$\begin{aligned} N^2 - 1 &\stackrel{(454b)}{=} d(G) = \delta^{ab} \delta^{ab} = \delta^{aa} \\ C_2(G)(N^2 - 1) &\stackrel{(470)}{=} -f^{acd} f^{dca} \stackrel{(457a)}{=} 2i f^{acd} (\text{tr}(T^d T^c T^a) - \text{tr}(T^c T^d T^a)) \\ &\stackrel{(454a)}{=} 2 (\text{tr}([T^a, T^c] T^c T^a) - \text{tr}(T^c [T^a, T^c] T^a)) \\ &= 4 \text{tr}(T^a \underbrace{T^c T^c}_{=C_2(N) \mathbf{1}_{N \times N}} T^a) - 4 \text{tr}(T^a T^c T^a T^c) \\ &\stackrel{(461)}{=} 4(C_2(N))^2 \text{tr}(\mathbf{1}_{N \times N}) - 4 T_{ij}^a T_{jk}^c T_{kl}^a T_{li}^c \\ &\stackrel{(469)}{=} 4(C_2(N))^2 N - 2 \underbrace{T_{kk}^c T_{jj}^c}_{=0} + \frac{2}{N} \underbrace{T_{jk}^c T_{kj}^c}_{=\text{tr}(T^c T^c)} \stackrel{(456)}{=} 4N(C_2(N))^2 + \frac{1}{N} \underbrace{\delta^{cc}}_{=N^2-1} \\ &\Rightarrow C_2(G) \stackrel{(467)}{=} 4N \frac{N^2 - 1}{4N^2} + \frac{1}{N} = \frac{N^2 - 1}{N} + \frac{1}{N} = N (= C(G)) \end{aligned} \quad (471)$$

Komplex konjugierte Darstellung: Die Matrizen

$$T_{\bar{r}}^a := -T_r^{a*} \quad (472)$$

bilden die zu r komplex konjugierte Darstellung $\bar{r}$, denn aus (454a) folgt

$$[-T_r^{a*}, -T_r^{b*}] = i f^{abc} (-T_r^{c*})$$

Die zu $r = N$ komplex konjugierte Darstellung bezeichnet man mit $\bar{N}$. Sind r und $\bar{r}$ äquivalent (also $T_{\bar{r}}^a = UT_r^a U^\dagger$), so nennt man r **reell**. Ein Spezialfall einer reellen Darstellung ist eine mit rein imaginären Matrizen, bei denen $T_{\bar{r}}^a = T_r^a$ und $U = \mathbf{1}$ ist. Aus (457a) schließt man leicht, dass f^{abc} reell ist. Damit ist G wegen $T_{Gac}^b = if^{abc}$ eine reelle Darstellung.

Für $SU(2)$ (aber nicht für $SU(N)$ mit $N \geq 3$) ist die definierende Darstellung reell. Denn

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2} \text{ und } T^{a*} = \frac{\sigma^{a*}}{2} = -\sigma^2 \frac{\sigma^a}{2} \sigma^2 = \varepsilon \frac{\sigma^a}{2} \varepsilon$$

da σ^2 unitär ist. $\Rightarrow T_{\bar{r}}^a = T_r^a$.

$SU(N)$ -Transformationen lassen das Skalarprodukt $\xi^\dagger \eta$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}^N$ invariant:

$$\xi^\dagger \eta = (U\xi)^\dagger U\eta \text{ für } U \in SU(N)$$

Reelle Darstellungen r haben die Eigenschaft, dass es eine Matrix G gibt, so dass $\xi^\top G \eta$ für $\xi, \eta \in \mathbb{C}^{d(r)}$ invariant ist:

$$\xi^\top G \eta = (U\xi)^\top G U \eta = \xi^\top U^\top G U \eta$$

für alle $\xi, \eta \in \mathbb{C}^{d(r)}$, also $G = U^\top G U$. Im Fall der $r = 2$ Darstellung der $SU(2)$ ist

$$G = \varepsilon = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

und damit ist also

$$\xi^\top \varepsilon \eta = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 \quad (473)$$

$SU(2)$ -invariant! (473) heißt **symplektische Form**.

Die Transformationsgruppe, die für $\xi, \eta \in \mathbb{C}^{2N}$

$$\xi_1 \eta_{2N} + \xi_2 \eta_{2N-1} + \cdots + \xi_N \eta_{N+1} - \xi_{N+1} \eta_N - \xi_{N+2} \eta_{N-1} - \cdots - \xi_{2N} \eta_1$$

invariant lässt, heißt $Sp(2N)$. D.h. $SU(2) = Sp(2N)$.

Praktischere Art, (473) zu nutzen:

Mit

$$\tilde{\xi} := \varepsilon \xi^* = \begin{pmatrix} \xi_2^* \\ -\xi_1^* \end{pmatrix} \quad (474)$$

ist neben $\xi^\dagger \eta$ auch $\tilde{\xi}^\dagger \eta = -\xi^\top \varepsilon \eta$ $SU(2)$ invariant. Transformiert sich ein Feld, das ein Teilchen beschreibt, gemäß r , so transformiert sich das zum Antiteilchen gehörende Feld gemäß $\bar{r}$. Antiquarks haben also zum Quark entgegengesetzte elektrische Ladung und Antifarbe. Dagegen benötigt man nicht das Konzept „Anti-Spin“ und „Anti-Isospin“, denn alle Darstellungen der $SU(2)$ sind reell!

Teilchen, die ihre eigenen Antiteilchen sind, transformieren sich nach reellen Darstellungen der Symmetriegruppen.

Beispiele:

1. Z-Boson: adjungierte Darstellung der $SU(2)$
2. Gluon: adjungierte Darstellung der $SU(3)$
3. rechtshändiges Majorana-Neutrino ist ein Singulett unter *allen* Eichgruppen
4. Supersymmetrie: Gluinos (Majorana-Fermion): adjungierte Darstellung der $SU(3)$

6.1.2 SU(N) - Eichtheorie

N Dirac-Felder (oder Weyl-Felder) $\psi_1 \dots \psi_N$ werden zu

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix} \quad (475)$$

zusammengefasst. ψ transformiere sich wie N bezüglich SU(N):

$$\psi(x) \rightarrow U\psi(x) = \exp(i\lambda_a(x)T^a)\psi(x) \quad (476)$$

λ_a hängt von x ab $\Rightarrow$ Eichtheorie

Ist die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ invariant bezüglich (476), so besitzt $\mathcal{L}$ eine **lokale innere** SU(N) - **Symmetrie** (= SU(N) - Eichsymmetrie). SU(2) - Eichtheorien heißen auch **Yang-Mills-Theorien** (1954), die vorgeschlagen wurden, um den starken Isospin (Heisenberg 1932) mit

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

zu eichen. Yukawa hatte 1935 die Pionen ($\pi^\pm$ entdeckt 1947, π^0 : 1950) als **massive Austauscheteilchen** der *starken* Wechselwirkung postuliert. Yang-Mills-Theorien sind jedoch in der *schwachen* Wechselwirkung realisiert, d.h. die zugehörige Quantenzahl ist der **schwache Isospin**. Die starke Wechselwirkung wird durch eine SU(3) - Eichtheorie beschrieben:

$$\psi = \begin{pmatrix} q_R \\ q_G \\ q_B \end{pmatrix} \quad q_{R,G,B}: \text{Quark-Felder} \quad (477)$$

mit der Quantenzahl **Farbe**. Mit (476) ist der eich-kinetische Term:

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi} i \not{D} \psi \quad (478)$$

eichinvariant, wenn sich die kovariante Ableitung

$$D_\mu := \partial_\mu \mathbf{1}_{N \times N} - ig A_\mu^a T^a \quad (479)$$

mit

$$U = \exp(i\lambda_a(x)T^a) \in \text{SU}(N) \quad (480)$$

wie

$$D_\mu \rightarrow U D_\mu U^\dagger \quad (481)$$

transformiert. Also

$$\begin{aligned} \partial_\mu - ig A_\mu^a T^a &\rightarrow U U^\dagger \partial_\mu + U (\partial_\mu U^\dagger) - ig A_\mu^a U T^a U^\dagger \\ &\Rightarrow A_\mu^a T^a \rightarrow A_\mu^a U T^a U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger \end{aligned} \quad (482)$$

Was ist $U T^a U^\dagger$, d.h. wie transformiert sich T^a ?

Betrachte:

$$U \exp(i\alpha_a T^a) U^\dagger \in \text{SU}(N)$$

weil Gruppen abgeschlossen sind, d.h. es gibt ein β_b mit

$$U \exp(i\alpha_a T^a) U^\dagger = \exp(i\beta_b T^b) \quad (483)$$

$$\text{also } \exp(i\lambda_c T^c) \exp(i\alpha_a T^a) \exp(-i\lambda_d T^d) = \exp(i\beta_b T^b) \quad (484)$$

$\beta_b = \beta_b(\alpha_a, \lambda_a)$ ist eine analytische Funktion von λ_a und α_a (Lie-Gruppe!). Für $\lambda_a \rightarrow 0$ finden wir $\beta_b \rightarrow \alpha_b$, also

$$\beta_b = \alpha_b(1 + O(\lambda)) + O(\alpha_a^2) \quad (485)$$

und wir können (483) bis zur ersten Ordnung in α_a entwickeln:

$$\alpha_a U T^a U^\dagger = \beta_b T^b \quad (486)$$

β_b ist wegen (485) linear in α , also $\beta_b = M_{ba} \alpha_a$ mit $M_{ba} = M_{ba}(U)$:

$$(485) \Rightarrow M_{ba}(\mathbf{1}) = \delta_{ba} \quad (487)$$

$$(486) \Rightarrow U T^a U^\dagger = M_{ba}(U) T^b \quad (488)$$

Man sieht leicht, dass die $M_{ab}(U)$ eine Darstellung der Gruppe bilden, siehe z.B. (487) und

$$\underbrace{U_2 U_1 T^a U_1^\dagger U_2^\dagger}_{(488)} = U_2 M_{ba}(U_1) T^b U_2^\dagger \stackrel{(488)}{=} M_{cb}(U_2) M_{ba}(U_1) T^c = [M(U_2) M(U_1)]_{ac} T^c$$

D.h. $M(U_2 U_1) = M(U_2) M(U_1)$. Damit ist $M(U(\lambda)) = \exp(i\lambda_c d^c)$ mit $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ Matrizen d^c . Eine infinitesimale Transformation in (488) liefert:

$$i\lambda_c \underbrace{[T^c, T^a]}_{=if^{cab}T^b} = i\lambda_c d_{ba}^c T^b \Rightarrow d_{ba}^c = if^{cab} = if^{bca}$$

$\Rightarrow$ D.h. die $M(U)$ bilden die adjungierte Darstellung

$$M(U(\lambda)) = \exp(i\lambda_c T_G^c) =: U_G(\lambda) \quad (489)$$

und (488) bedeutet

$$U T^a U^\dagger = T^b U_G^{ba} \quad (490)$$

D.h. (482) ist äquivalent zu

$$A_\mu^a T^a \rightarrow A_\mu^a T^b U_G^{ba} + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger \quad (491)$$

Multiplikation mit T^c und Spurbildung liefert mit $\text{tr}(T^a T^c) = \frac{1}{2} \delta^{ac}$:

$$A_\mu^a \rightarrow U_G^{ab} A_\mu^b + \frac{2i}{g} \text{tr}(T^a U \partial_\mu U^\dagger) \quad (492)$$

D.h. (für globale Transformationen, $\partial_\mu U = 0$) A_μ^a transformiert sich nach der adjungierten Darstellung. Für infinitesimale Transformationen $U = 1 + i\lambda_c(x)T^c$ findet man leicht aus (492)

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a - \lambda_c(x)f^{acb}A_\mu^b + \frac{2i}{g}\text{tr}(T^a(-i)\partial_\mu\lambda_c(x)T^c) = A_\mu^a + \lambda_c(x)f^{abc}A_\mu^b + \frac{1}{g}\partial_\mu\lambda_a(x) \quad (493)$$

Wir definieren den Feldstärketensor $F_{\mu\nu}^a$:

$$[D_\mu, D_\nu] =: -igF_{\mu\nu}^a T^a \quad (494)$$

$$\begin{aligned} -igF_{\mu\nu}^a T^a &= [D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu - igA_\mu^a T^a, \partial_\nu - igA_\nu^b T^b] \\ &= ig(\partial_\nu A_\mu^a)T^a - ig(\partial_\mu A_\nu^a)T^a - g^2 A_\mu^a A_\nu^b \underbrace{[T^a, T^b]}_{if^{abc}T^c} \end{aligned} \quad (495)$$

$$\Rightarrow F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (496)$$

($g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$: nichtabelscher Term)

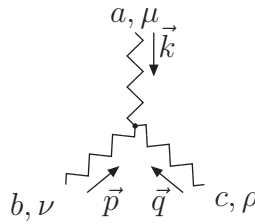
Aus (494) folgt wegen $[D_\mu, D_\nu] \rightarrow U[D_\mu, D_\nu]U^\dagger$ (wegen (481)): $F_{\mu\nu}^a T^a \rightarrow U F_{\mu\nu}^a T^a U^\dagger$, so dass $\text{tr}(F_{\mu\nu}^a T^a F^{\mu\nu b} T^b)$ eichinvariant ist.

$$\mathcal{L}_{eich} = -\frac{1}{2}\text{tr}(F_{\mu\nu}^a T^a F^{\mu\nu b} T^b) = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \text{tr}(T^a T^b) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (497)$$

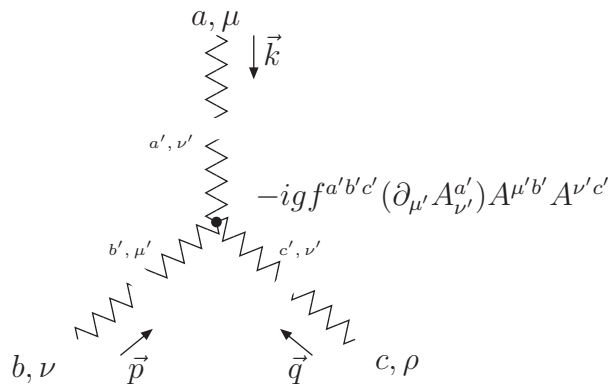
ist der eich-kinetische Term der Eichbosonen. Wegen des dritten Terms in (496) enthält er Eichboson-Selbstkopplungen. Ausgeschrieben:

$$\mathcal{L}_{eich} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^a)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^a)(\partial^\nu A^{\mu a}) - g f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)A^{\mu b}A^{\nu c} - g^2 f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d}A^{\nu e} \quad (498)$$

Feynman-Regeln



zunächst: $i\partial_\mu \leftrightarrow p_\mu$, wobei p_μ der *einlaufende* Impuls ist, der dem abgeleiteten Feld entspricht. Bei vielen Indizes geht man am besten so vor:



Alle Wick-Kontraktionen der Wechselwirkung mit den äußeren Linien, d.h. sie summieren über alle Möglichkeiten, den Wechselwirkungsvertex mit äußeren Linien zu kontrahieren.

$\nu' a'$	$\mu' b'$	$\nu' c'$	Feynman-Regel
μa	νb	ρc	$-ig f^{abc}(-k^\nu) g^{\mu\rho}$
μa	ρc	νb	$-ig f^{acb}(-k^\rho) g^{\mu\nu}$
νb	μa	ρc	$-ig f^{bac}(-p^\mu) g^{\nu\rho}$
νb	ρc	μa	$-ig f^{bca}(-p^\rho) g^{\nu\mu}$
ρc	μa	νb	$-ig f^{cab}(-q^\mu) g^{\rho\nu}$
ρc	νb	μa	$-ig f^{cba}(-q^\nu) g^{\rho\mu}$

also

$$g f^{abc} [g^{\mu\nu} (k - p)^\rho + g^{\nu\rho} (p - q)^\mu + g^{\rho\mu} (q - k)^\nu] \quad (499)$$

analog:

$$\begin{aligned}
 & -ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
 & + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
 & + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})] \quad (500)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{eich} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{fix} \quad (501)$$

mit $\mathcal{L}_{eich} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} = \dots$ aus (498)

$$\mathcal{L}_m = -m \bar{\psi} \psi$$

$$\text{und } \mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{\mu a})^2 := -\frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^{\mu a} \partial_\nu A^{\nu a}$$

Propagatoren: (j, k : SU(N) - Index, α, β Dirac-Index)

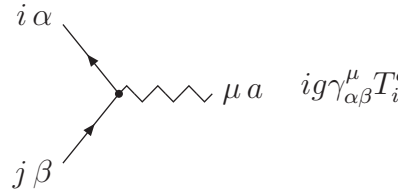
Fermion-Propagator (in Darstellung N):

$$\alpha \xrightarrow[p]{j} \beta \quad \frac{i[p' + m]_{\beta\alpha}}{p^2 - m^2 + i\delta} \delta_{jk} \quad j, k = 1, \dots, N \quad (502)$$

Eichboson-Propagator:

$$\alpha \xrightarrow[k]{a} \beta \quad \frac{-i}{k^2 + i\delta} \left[g_{\alpha\beta} - (1 - \xi) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right] \delta_{ab} \quad a, b = 1, \dots, N^2 - 1 \quad (503)$$

Fermion-Eichboson-Vertex:



$$ig \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} T_{ij}^a \quad (504)$$

Eigenschaften des Eichfeldes

1. Wegen $A_{\mu}^a \bar{\psi} \gamma^{\mu} T^a \psi = \bar{\psi} A \psi \stackrel{!}{=} (\bar{\psi} A \psi)^{\dagger} \Rightarrow A_{\mu}^a$ ist *reell*
2. A_{μ}^a beschreibt ein *masseloses* Teilchen, denn ein Masseterm $\mathcal{L} \supset \frac{m^2}{2} A_{\mu}^a A^{\mu a}$ verletzt die Eichinvarianz, denn mit der infinitesimalen Eichtransformation in (493) ist

$$\begin{aligned} A_{\mu}^a A^{\mu a} &\rightarrow [A_{\mu}^a + f^{abc} A_{\mu}^b \lambda_c + \frac{1}{g} \partial_{\mu} \lambda_a] [A^{\mu a} + f^{ade} A^{\mu d} \lambda_e + \frac{1}{g} \partial^{\mu} \lambda_a] \\ &= A_{\mu}^a A^{\mu a} + \frac{2}{g} A^{\mu a} \partial_{\mu} \lambda_a + O(\lambda_a^2) \end{aligned}$$

und der Masseterm ist nur invariant unter *globalen* SU(N) Transformationen mit $\partial_{\mu} \lambda_a = 0 \Rightarrow$ Eichbosonen sind masselos.

Die schwache Wechselwirkung ist jedoch kurzreichweitig und muss durch den Austausch *massiver* Bosonen beschreiben werden (Yukawa 1935). Lösung: Higgs-Mechanismus (1964)

6.1.3 Quantenchromodynamik (QCD):

Die QCD ist eine SU(3) Eichtheorie. Mit den Feynmanregeln (499)-(504) können wir direkt QCD-Prozesse in niedrigster Ordnung ausrechnen.

Die Lagrangedichte der QCD ist

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{eich} + \sum_q \bar{q} [\not{D} - m_q] q + \mathcal{L}_{fix} \quad (505)$$

($\mathcal{L}_{fix}$: zur störungstheoretischen Auswertung)

wobei die Summe über q über die **Quark-Flavours** $q = u, d, s, c, b, t$ läuft. Um Strahlungskorrekturen auszurechnen, müssen wir zu (505) noch einen weiteren Term, der mit $\mathcal{L}_{fix}$ zusammenhängt, addieren). Die Generatoren der definierenden Darstellung der SU(3) werden durch die **Gell-Mann-Matrizen** λ^a ausgedrückt.

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad (506)$$

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (507)$$

Als **Rang** einer Lie-Gruppe bezeichnet man die maximale Anzahl der miteinander vertauschen-
den, also simultan diagonalisierbaren Generatoren:

Die SU(2) hat Rang 1, die SU(3) hat Rang 2: z.B. $[\lambda^3, \lambda^8] = 0$ also $f^{38a} = 0$

Aus (457a) folgt mit (506):

$$f^{abc} = -\frac{i}{4}(\text{tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c) - \text{tr}(\lambda^b \lambda^a \lambda^c))$$

und mit (507) kann man die Strukturkonstanten ausrechnen:

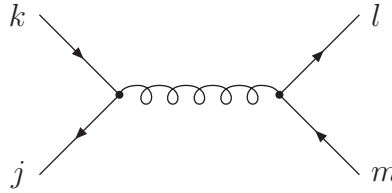
$$f^{123} = 1, f^{147} = f^{246} = f^{345} = \frac{1}{2}, f^{156} = f^{367} = -\frac{1}{2}, f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (508)$$

Alle anderen f^{abc} erhält man durch Permutation der Indizes aus (508), oder sie sind gleich 0.

Farbfluss-Diagramme: Eine Gluon-Linie kann man auch als Doppellinie gezeichnet werden:

$$a \text{---} \text{---} b \leftrightarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \xleftarrow{j} \end{array}$$

wobei den Doppellinien ein Indexpaar (j, k) mit $j, k = 1, 2, 3$ (bzw. r, g, b) zugeordnet wird. Denn: Verbindet die Gluon-Linie z.B. zwei Quark-Linien:



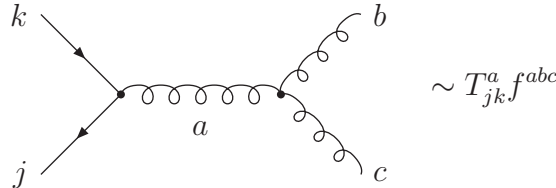
so liefern (504) und (469) den Farbfaktor (mit $N = 3$):

$$T_{jk}^a T_{lm}^a = \frac{1}{2} \delta_{jm} \delta_{kl} - \frac{1}{2N} \delta_{jk} \delta_{lm}$$

d.h. wir können das obige Diagramm mit

$$\frac{1}{2} \begin{array}{c} j \\ \swarrow \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ j \end{array} - \frac{1}{2N^2} \begin{array}{c} k \\ \swarrow \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ k \end{array} \quad \text{tr } \mathbf{1} = N \quad (509)$$

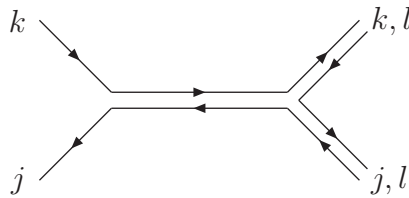
identifizieren. Endet die Gluon-Linie an einem anderen Gluon, z.B.



$$\sim T_{jk}^a f^{abc}$$

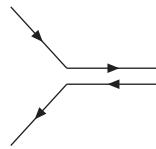
so verwenden wir zusätzlich (457a). Ein externer Farbindex b wird mit den Paaren (j, k) identifiziert, die zu nichtverschwindenden Elementen von $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ gehören.

Damit findet man im Beispiel Diagramme wie:



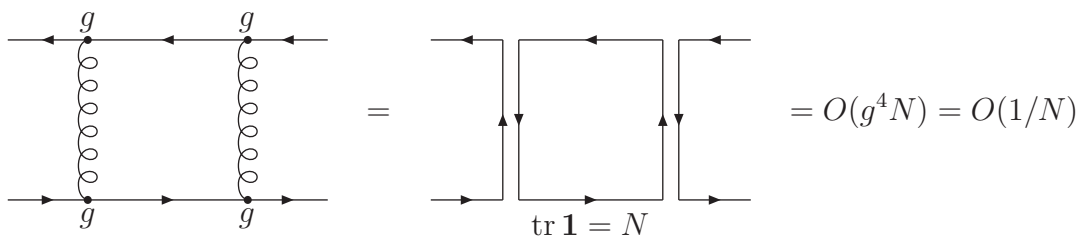
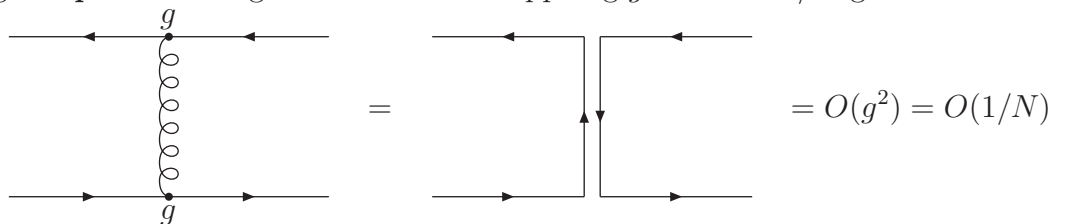
1. Farbfluss-Diagramme zeigen die Erhaltung der Quantenzahl Farbe
2. Eine beliebte Methode, um die QCD in den Griff zu bekommen, ist die $1/N$ - **Entwicklung** (large N - Expansion) (t'Hooft)

Das rechte Diagramm in (509) ist mit $1/N$ unterdrückt. Den führenden Term der $1/N$ - Entwicklung findet man, indem man nur

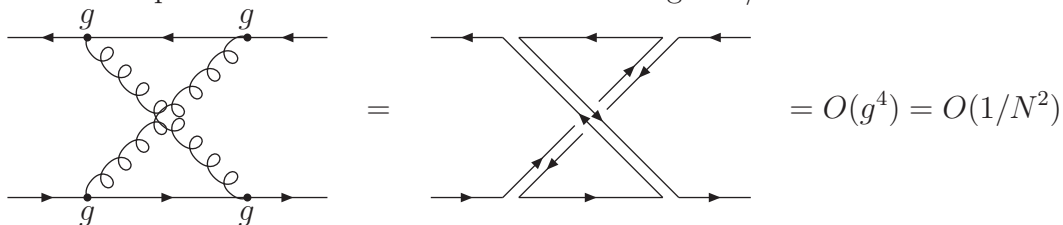


als Quark-Gluon-Kopplung verwendet.

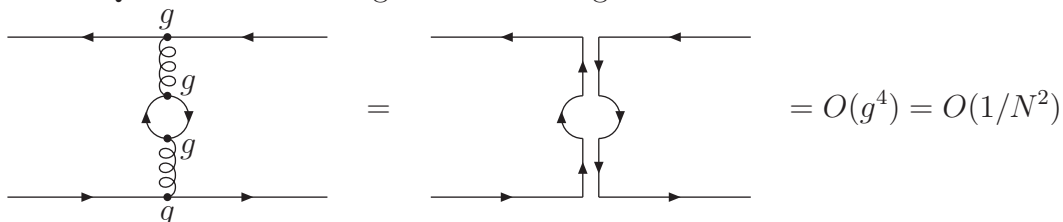
Zeichnet man in einem Vier-Quark-Prozess die Quarklinien gegensinnig, so tragen zur führenden Ordnung nur **planare** Diagramme bei. Die Kopplung g wird wie $1/N$ gezählt.



$\Rightarrow$ ein zusätzliches planares Gluon verändert die Ordnung in $1/N$ nicht. Jedoch ist

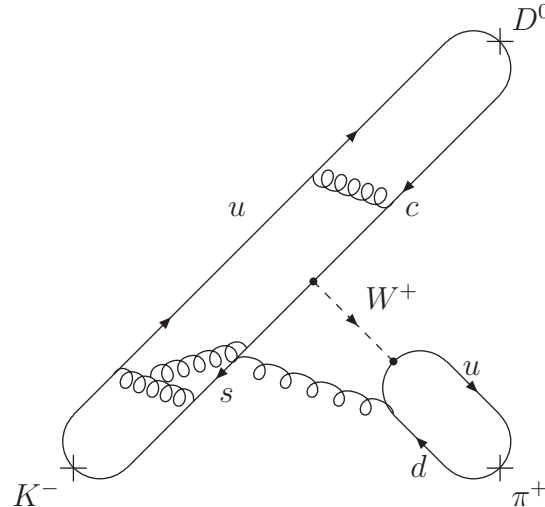


Einfügen einer Quarkschleife verringert die Ordnung:

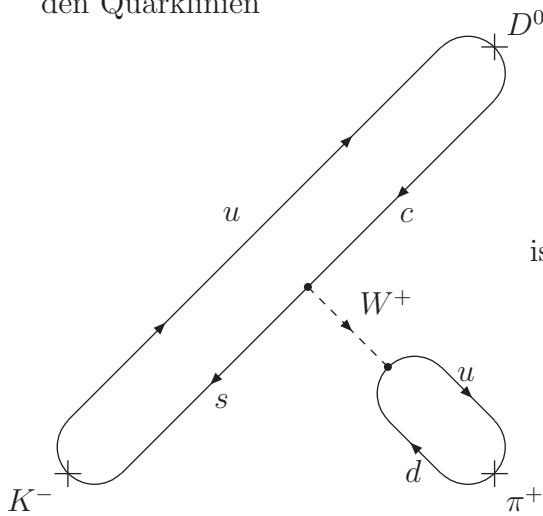


Anwendung der $1/N$ - Entwicklung: Abschätzung von schwachen D-Meson-Zerfällen: Die Zerfallsraten von z.B. $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$ und $D^0 \rightarrow \bar{K}^0 \pi^0$ kann man nicht verlässlich ausrechnen. Man kann jedoch das Verhalten für $N \rightarrow \infty$ studieren.

$D^0 \rightarrow K^- \pi^+$:

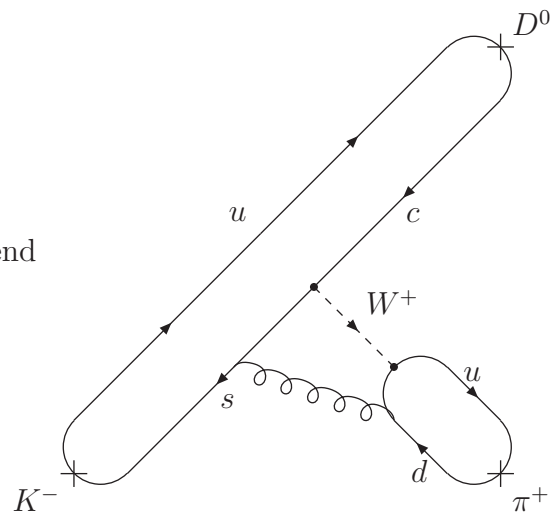


Zur führenden Ordnung in $1/N$ gehören planare Diagramme ohne Gluon-Austausch zwischen den Quarklinien

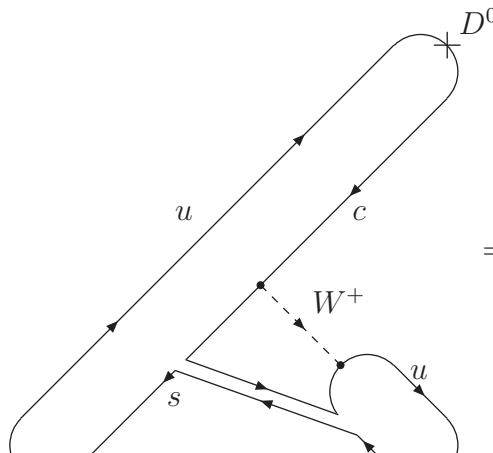


dem Farbfluss-Diagramm

ist $O(N^2)$ während



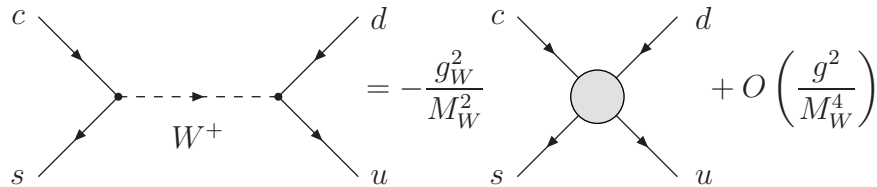
$= O(N^0)$



entspricht! Der W-Austausch zwischen den beiden Quarkströmen kann durch eine Vierquark-Kopplung beschrieben werden, weil hier M_W viel größer ist als der Impuls q , der durch den W-Propagator fließt.

$$g_W^2 i \bar{s}_L \gamma_\mu c_L \frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2 - M_W^2} i \bar{u}_L \gamma_\nu d_L = -i \frac{g_W^2}{M_W^2} \bar{s}_L \gamma_\mu c_L \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + O\left(\frac{q^2}{M_W^4}\right)$$

Graphisch:



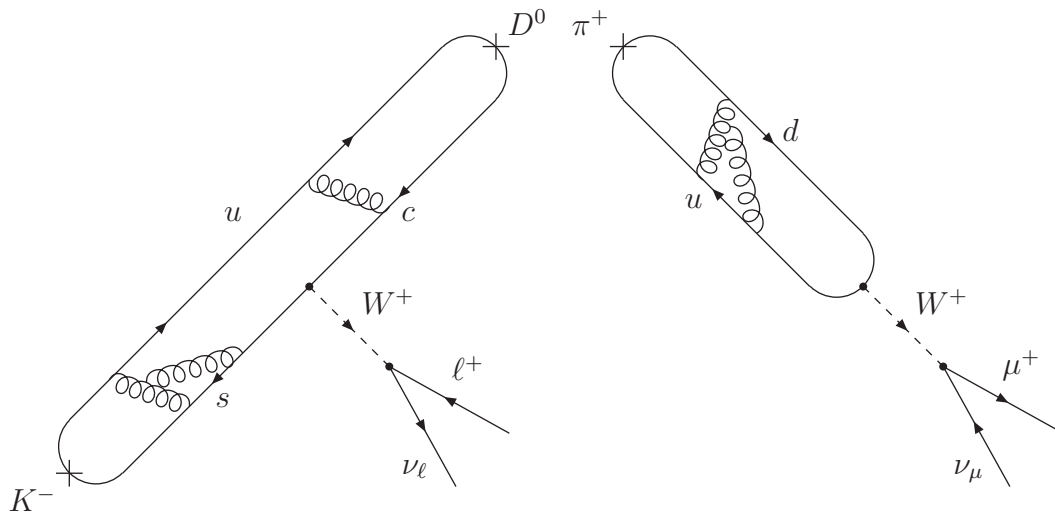
Um die Zerfallsrate von $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$ zu bestimmen, muss man also

$$\mathcal{M} = \langle K^- \pi^+ | \underbrace{\bar{s}_L \gamma_\mu c_L \bar{u}_L \gamma^\mu d_L}_{\text{Wechselwirkende QCD-Felder} \Rightarrow \text{keine Störungstheorie}} | D^0 \rangle$$

ausrechnen. Unsere $1/N$ Betrachtung hat gezeigt, dass

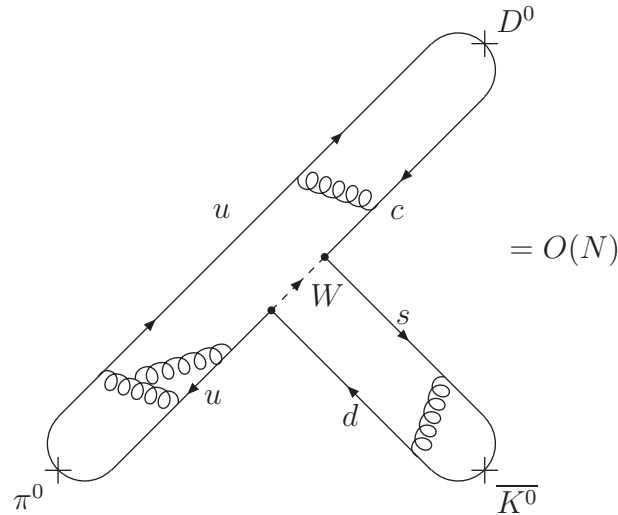
$$\langle K^- \pi^+ | \bar{s}_L \gamma_\mu c_L \bar{u}_L \gamma^\mu d_L | D^0 \rangle = \langle K^- \pi^+ | \bar{s}_L \gamma_\mu c_L | D^0 \rangle \langle \pi^+ | \bar{u}_L \gamma^\mu d_L | 0 \rangle (1 + O(1/N^2))$$

D.h. das Matrixelement $\mathcal{M}$ **faktoriert** in das Produkt der Matrixelemente zweier **Stromoperatoren**, die man in (semi-)leptonischen Zerfällen messen kann.



bis auf Korrekturen der Ordnung $1/N^2 \sim 10\%$

$$D^0 \rightarrow \overline{K}^0 \pi^0:$$



d.h. ein Faktor $1/N$ relativ zu $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$

Weil die Zerfallsrate Γ quadratisch im Matrixelement ist, also

$$\frac{\Gamma(D^0 \rightarrow \overline{K}^0 \pi^0)}{\Gamma(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)} = O(1/N^2) \sim 0,1$$

- Man nennt Zerfälle wie $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$ **farb-erlaubt**
- und solche wie $D^0 \rightarrow \overline{K}^0 \pi^0$ **farb-unterdrückt**.

6.2 Spontane Symmetriebrechung

Besitzt die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ eine Symmetrie S , der Grundzustand (das Vakuum) jedoch nicht, so nennt man S eine **spontan gebrochene** Symmetrie. Es können sowohl diskrete, als auch kontinuierliche Symmetrien spontan gebrochen werden. Wir betrachten hier kontinuierliche Symmetrien. Dazu betrachten wir die infinitesimalen Transformationen

$$\phi_j \rightarrow \phi_j + i\alpha_a T_{jk}^a \phi_k \quad (510)$$

mit einer **irreduziblen** Darstellung T_{jk}^a der Symmetriegruppe.
Für eine *ungebrochene* Symmetrie gilt:

$$\langle 0 | \phi_j | 0 \rangle \stackrel{!}{=} \langle 0 | \phi_j | 0 \rangle + i\alpha_a T_{jk}^a \langle 0 | \phi_k | 0 \rangle, \text{ also } \langle 0 | \phi_k | 0 \rangle = 0 \quad (511)$$

denn $\alpha_a T^a$ ist für allgemeine $\alpha_a \neq 0$ nicht singulär in einer irreduziblen Darstellung.
Ist Q^a die zu

$$\phi_j \rightarrow \phi'_j = \exp(i\alpha_a T^a)_{jk} \phi_k \quad (512)$$

gehörende Noether-Ladung, so ist

$$\phi'_j = \exp(i\alpha_a Q^a) \phi_j \exp(-i\alpha_a Q^a) \quad (513)$$

(vgl. Schaubild nach (142))

Infinitesimal bedeuten (512) und (513)

$$i\alpha_a T_{jk}^a \phi_k = i\alpha_a [Q^a, \phi_j] \quad (514)$$

Eine ungebrochene Symmetrie bedeutet

$$Q^a |0\rangle = 0 \quad (515a)$$

d.h. das Vakuum ist ungeladen und (515a) impliziert mit (514) ebenfalls

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(515a)}{=} i\alpha_a \langle 0 | [Q^a, \phi_j] | 0 \rangle \stackrel{(514)}{=} i\alpha_a T_{jk}^a \langle 0 | \phi_k | 0 \rangle \\ \text{also } Q^a |0\rangle &= 0 \Rightarrow \langle 0 | \phi_k | 0 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (515b)$$

Die Umkehrung gilt nicht, denn es ist z.B. $\langle 0 | W^\mu | 0 \rangle = 0$, also auch $\langle 0 | [I_3, W^\mu] | 0 \rangle = 0$ aber $I_3 | 0 \rangle \neq 0$ (I_3 : schwacher Isospin)

Besitzt mindestens eine Komponente ϕ_j einen **Vakuumserwartungswert** (Vacuum Expectation Value = VEV)

$$v_j := \langle 0 | \phi_j | 0 \rangle \neq 0 \quad (516)$$

so impliziert (514) sofort

$$Q^a |0\rangle \neq 0 \quad (517)$$

d.h. das Vakuum ist geladen unter der Symmetrie. Auch hier ist es so, dass die Umkehrung nicht gilt, denn im SM haben die meisten Felder keine VEVs. In der QCD haben keine elementaren Felder VEVs, aber z.B. $\bar{\psi}_R \psi_L + h.c.$. Ausserdem sind *alle* Symmetrien, bezüglich denen sich ϕ_j nichttrivial transformiert, spontan gebrochen.

D.h. ϕ_j und v_j sind Singulett bezüglich aller ungebrochenen Symmetrien

$\Rightarrow \phi_j$ ist Skalarfeld, denn sonst wäre die Lorentz-Invarianz gebrochen.

ϕ_j in (516) muss kein elementares Feld sein, es kann auch eine Linearkombination von Produkten von Feldern sein (z.B. bricht $\langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s | 0 \rangle$ die so genannte **chirale** $SU(3) \times SU(3)$ - Symmetrie der QCD). Ist die Translationsinvarianz ungebrochen, so hängt v nicht von X ab:

$$v_j = \langle 0 | \phi_j(x) | 0 \rangle \stackrel{(141)}{=} \underbrace{\langle 0 | \exp(iPx) \phi_j(0) \exp(-iPx) | 0 \rangle}_{\langle 0 |} = \langle 0 | \phi_j(0) | 0 \rangle$$

6.2.1 Goldstone-Theorem

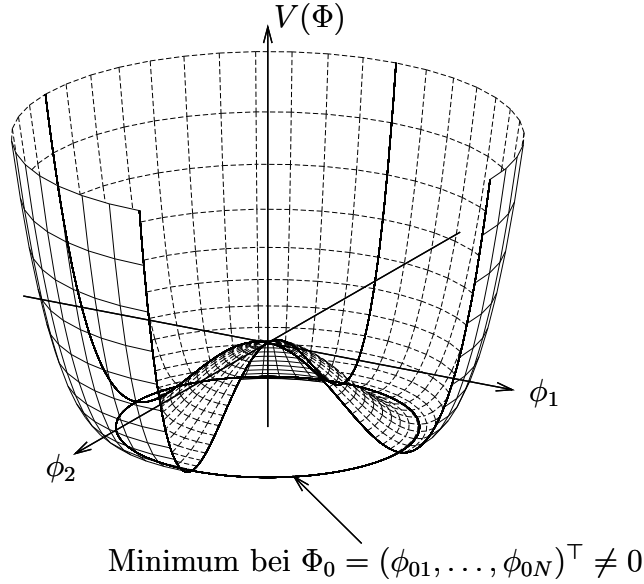
Hat $\mathcal{L}$ die Symmetriegruppe G_1 und $|0\rangle$ die Symmetriegruppe $G_2 \subset G_1$, so ist G_1 zu G_2 **spontan gebrochen**. Es gibt dann $J := \dim G_1 - \dim G_2$ masselose Bosonen, sogenannte **Goldstone-Bosonen**. Wir beweisen das Theorem zunächst für klassische Felder

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} \quad (\text{Symmetriemultiplett})$$

mit reell gewählten ϕ_j und Potential (Selbstwechselwirkung) $V(\Phi)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^\top \partial^\mu \Phi - V(\Phi) \quad (518)$$

Das Potential hat ein



Am Minimum gilt:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \phi_j} \right|_{\phi_j = \phi_{0j}} = 0, \quad \phi_{0j} = v_j \quad (519)$$

Wir entwickeln das Potential um das Minimum herum:

$$V(\Phi) = V(\Phi_0) + \frac{1}{2}(\Phi - \Phi_0)_j m_{jk}^2 (\Phi - \Phi_0)_k + O(|\Phi - \Phi_0|^3)$$

mit der **Massenmatrix**

$$M^2 = [m^2]_{jk} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_j \partial \phi_k} \right|_{\Phi = \Phi_0} \quad (520)$$

Mit einer orthogonalen Transformation ($R^\top R = \mathbf{1}$)

$$R^\top M^2 R = \text{diag}(m_1^2, \dots, m_N^2) \quad (521)$$

wird M^2 diagonalisiert. Mit $\Phi' = R^\top(\Phi - \Phi_0)$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^\top \partial^\mu \Phi &= \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi'^\top \partial^\mu \Phi' \text{ und} \\ \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_0)_j m_{jk}^2 (\Phi - \Phi_0)_k &= \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_0)^\top M^2 (\Phi - \Phi_0) \\ &\stackrel{(521)}{=} \frac{1}{2} \underbrace{(\Phi - \Phi_0)^\top R}_{=\Phi'^\top} \underbrace{R^\top M^2 R}_{\text{diag}(m_1^2, \dots, m_N^2)} \underbrace{R^\top (\Phi - \Phi_0)}_{=\Phi'} = \frac{1}{2} \phi'_j m_j^2 \phi'_j \end{aligned} \quad (522)$$

so dass die ϕ'_j den physikalischen Feldern entsprechen. Da $\mathcal{L}$ und $V(\Phi)$ invariant bezüglich (510) ist, gilt:

$$\begin{aligned} V(\Phi) = V(\Phi + i\alpha_a T^a \Phi) &= V(\Phi) + i\alpha_a T_{jk}^a \frac{\partial V}{\partial \phi_j} \phi_k + O(\alpha_a^2) \\ \text{also } \frac{\partial V}{\partial \phi_j} T_{jk}^a \phi_k &= 0 \end{aligned} \quad (523)$$

Ableiten nach ϕ_l liefert

$$0 = \frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial \phi_l \partial \phi_j} T_{jk}^a \phi_k + \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \phi_j} T_{jl}^a \quad (524)$$

Speziell für $\phi_j = \phi_{0j}$ verschwindet der zweite Term wegen (519) und mit (520) folgt aus (524)

$$M^2 T^a \Phi_0 = 0 \quad (525)$$

Wir wählen die Generatoren nun speziell so, dass T^a , $a = 1 \dots J$ die Erzeuger der gebrochenen Symmetrien sind und $a = J + 1 \dots N$ die Erzeuger der ungebrochenen Untergruppe G_2 sind. Für $a = J + 1 \dots N$ folgt (siehe (510))

$$\phi_{0j} = \phi_{0j} + i\alpha_a T_{jk}^a \phi_{0k}$$

also $T^a \Phi_0 = 0$ und (525) ist erfüllt. Für $a = 1 \dots J$ ist Φ_0 nicht invariant und somit

$$T^a \Phi_0 \neq 0 \quad (526)$$

(525) impliziert somit, dass alle

$$T^a \Phi_0 \text{ für } a = 1 \dots J \quad (527)$$

Eigenvektoren von M^2 zum Eigenwert 0 sind. Alle diese $T^a \Phi_0$ sind linear unabhängig. Wäre $\alpha_a T^a \Phi_0 = \beta_a T^a \Phi_0$, $a = 1 \dots J$ mit $(\alpha_a) \neq (\beta_a)$, dann wäre $(\alpha_a - \beta_a) T^a \Phi_0 = 0$ und die Richtung $(\alpha_a - \beta_a) T^a$ (die durch Basiswechsel in $\alpha'_1 T'^1$ gedreht werden könnte) gehören zu mit $a = J + 1 \dots N$ indizierten Generatoren der ungebrochenen Symmetrie

$\Rightarrow$ Es gibt $J = \dim G_1 - \dim G_2$ masselose Bosonen

Quantisiert man die Theorie zu $\mathcal{L}$ in (518), so identifiziert man den Vakuumserwartungswert mit Φ_0 :

$$\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \Phi_0 \quad (528)$$

und die physikalischen Felder $\Phi' = R^\top (\Phi - \Phi_0)$ werden wie üblich (Klein-Gordon-Felder) quantisiert. Das Goldstone Theorem gilt allgemeiner: Zum einen bleiben die Goldstone-Bosonen masselos, wenn Φ quantisiert wird. Zum anderen gilt es auch, wenn die Symmetriebrechung nicht „von Hand“ durch ein skalares Potential $V(\Phi)$ hervorgerufen wird, sondern durch die quantisierte Wechselwirkung der Teilchen (meist durch nichtperturbative Effekte) man spricht dann von **dynamischer Symmetriebrechung** (Beispiel: BCS-Theorie der Supraleitung)

Beweis des Goldstone-Theorems für beliebige Quantenfeldtheorien:

Der Noether-Strom $j^{\mu,a}$ zu $\exp(i\alpha_a T^a) \in G_1$ ist erhalten:

$$\partial_\mu j^{\mu,a} = 0 \quad (529)$$

und die Noether-Ladung Q^a

$$Q^a(t) = \int d^3 \vec{x} j^{0a}(\vec{x}, t) \quad (530)$$

ist zeitunabhängig:

$$Q^a(t) = Q^a(0) = Q^a \quad (531)$$

Leider liegt $|0\rangle$ nicht im Definitionsbereich von $Q^a (= Q^{a\dagger})$:

$$\begin{aligned}
\|Q^a|0\rangle\|^2 &= \langle 0|Q^{a2}|0\rangle = \int d^3\vec{x} \langle 0|j^{0a}(x)Q^a|0\rangle \\
&\stackrel{(141)}{=} \int d^3\vec{x} \langle 0|\exp(iPx)j^{0a}(0)\exp(-iPx)Q^a|0\rangle \\
&\quad ([P, Q^a] = 0 \text{ für innere Symmetrien}) \\
&= \int d^3\vec{x} \langle 0|j^{0a}(0)Q^a|0\rangle = \infty
\end{aligned} \tag{532}$$

Man braucht jedoch nur eine schwächere Bedingung für Vakuumserwartungswerte, die Q involvieren soll. Wir nehmen nun an, dass es einen skalaren Operator $\phi(x)$ mit $\langle 0|\phi(x)|0\rangle = v \neq 0$ gibt und v nicht invariant bezüglich G_2 ist. Dabei kann $\phi(x)$ ein elementares Feld (z.B. Higgs-Feld) sein oder ein **zusammengesetzter Operator** (composite operator), das ist ein Produkt elementarer Felder am selben x , z.B. $\phi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$, $\phi(x) = V_\mu(x)V^\mu(x)$ mit Spinorfeld ψ und Vektorfeld (kein Eichfeld) V^μ (oder $\phi(x) = G_{\mu\nu}^{\prime a}G^{\mu\nu a}$). Mit (513) folgt für die Generatoren $a = 1 \dots J$ der gebrochenen Symmetriegruppe G_1/G_2 mit Negation von (515b):

$$\begin{aligned}
v_j &= \langle 0|\phi_j|0\rangle \\
&\neq \langle 0|\exp(i\alpha_a Q^a)\phi_j \exp(-i\alpha_a Q^a)|0\rangle = \langle 0|\phi_j|0\rangle + i\alpha_a \langle 0|[Q^a, \phi_j]|0\rangle + Q(\alpha_a^2) \\
&\Rightarrow \langle 0|[Q^a, \phi_j]|0\rangle \neq 0 \text{ für } a = 1 \dots J
\end{aligned} \tag{533}$$

Wegen

$$\langle 0|[Q^a, \phi_j(0)]|0\rangle \stackrel{(514)}{=} T_{jk}^a \underbrace{\langle 0|\phi_k(0)|0\rangle}_{v_k} \tag{534}$$

ist $\langle 0|[Q^a, \phi_j(0)]|0\rangle$ definiert (sofern (513) definiert ist). Aus (534) folgt für $a = 1 \dots J$:

$$0 \neq T_{jk}^a v_k = \langle 0|[Q^a, \phi_j(0)]|0\rangle \stackrel{(530)}{=} \int d^3\vec{x} \langle 0|[j^{0a}(\vec{x}, t), \phi_j(0)]|0\rangle$$

In diese Gleichung setzt man ein:

$$\mathbf{1} = |0\rangle\langle 0| + \sum_\lambda \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} |\lambda_p\rangle\langle \lambda_p|$$

Dabei läuft die Summe über alle Eigenzustände $|\lambda_p\rangle$ des Hamilton-Operators H . Wegen mit $H|\lambda_p\rangle = E_p^\lambda |\lambda_p\rangle$, $\vec{P}|\lambda_p\rangle = \vec{p}_\lambda |\lambda_p\rangle$ entsprechen die $|\lambda_p\rangle$ dem physikalischen Teilchenspektrum).

$$\begin{aligned}
0 &\neq T_{jk}^a v_k = \int d^3\vec{x} \langle 0|[j^{0a}(x), \phi_j(0)]|0\rangle = \int d^3\vec{x} \langle 0|j^{0a}(x)\phi_j(0)|0\rangle - \langle 0|\phi_j(0)j^{0a}(x)|0\rangle \\
&= \int d^3\vec{x} \sum_\lambda \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (\langle 0|j^{0a}(x)|\lambda_p\rangle\langle \lambda_p|\phi_j(0)|0\rangle - \langle 0|\phi_j(0)|\lambda_p\rangle\langle \lambda_p|j^{0a}(x)|0\rangle)
\end{aligned} \tag{535}$$

(Der zweite Term in (535) ist nur für reelle ϕ_j das komplex konjugierte des ersten Terms.)

$$\begin{aligned} \text{Mit (vgl.(141)) } j^{0a}(x) &= \exp(iPx) j^{0a}(0) \exp(-iPx) \\ \text{und } \exp(-iPx) |\lambda_p\rangle &= \exp(-iE_p^\lambda t) \exp(i\vec{p}_\lambda \vec{x}) |\lambda_p\rangle \end{aligned}$$

$$\text{wird die Integration zu } \int d^3\vec{x} \exp(i\vec{p}_\lambda \vec{x}) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_\lambda)$$

Damit erhält man dann aus Gleichung (535):

$$\begin{aligned} 0 \neq T_{jk}^a v_k &= \sum_\lambda \int d^3\vec{p} \delta^{(3)}(\vec{p}_\lambda) \left(\langle 0 | j^{0a}(0) | \lambda_p \rangle \langle \lambda_p | \phi_j(0) | 0 \rangle \exp(-iE_p^\lambda t) \right. \\ &\quad \left. - \langle 0 | j^{0a}(0) | \lambda_p \rangle^* \langle 0 | \phi_j(0) | \lambda_p \rangle \exp(+iE_p^\lambda t) \right) \end{aligned} \quad (536)$$

$$\begin{aligned} 0 \neq T_{jk}^a v_k &= \sum_\lambda \left(\langle 0 | j^{0a}(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_0 | \phi_j(0) | 0 \rangle \exp(-iM_\lambda t) \right. \\ &\quad \left. - \langle 0 | j^{0a}(0) | \lambda_0 \rangle^* \langle 0 | \phi_j(0) | \lambda_0 \rangle \exp(+iM_\lambda t) \right) \end{aligned} \quad (537)$$

wobei $M_\lambda = E_p^\lambda(\vec{p}=0)$ die Masse des Zustands $|\lambda_p\rangle$ ist. Wegen $\frac{dv_k}{dt} = 0$ folgt aus (537):

$$\begin{aligned} 0 &= -i \sum_\lambda M_\lambda \left(\langle 0 | j^{0a}(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_0 | \phi_j(0) | 0 \rangle \exp(-iM_\lambda t) \right. \\ &\quad \left. + \langle 0 | j^{0a}(0) | \lambda_0 \rangle^* \langle 0 | \phi_j(0) | \lambda_0 \rangle \exp(+iM_\lambda t) \right) \end{aligned} \quad (538)$$

Weil (538) identisch in t gilt, muss für jeden Koeffizienten entweder M_λ oder der Koeffizient

$$a_M := \sum_{\lambda'} \langle 0 | j^{0a}(0) | \lambda'_0 \rangle \langle \lambda'_0 | \phi_j(0) | 0 \rangle$$

(wobei λ' über alle Zustände mit gleicher Masse $M_{\lambda'} = M$ läuft), verschwinden. Gleiches gilt für den Koeffizienten b_M des $\sim \exp(iMt)$ Terms.

Wären alle $a_M = 0$ und $b_M = 0$, so wäre (537) verletzt. Es gibt also zu jedem $a = 1 \dots J$ mindestens einen Zustand λ mit $M_\lambda = 0$, was das Goldstone-Theorem beweist.

Für Goldstone-Bosonen λ ist also (siehe (537)) $a_0 \neq 0$ oder $b_0 \neq 0$ bzw.

$$\langle 0 | j^{0a} | \lambda \rangle \neq 0 \text{ und } \begin{cases} \langle 0 | \phi_j(0) | \lambda \rangle \neq 0 \text{ oder} \\ \langle 0 | \phi_j^\dagger(0) | \lambda \rangle = \langle \lambda | \phi_j(0) | 0 \rangle^* \neq 0 \end{cases}$$

D.h. j^{0a} hat eine Komponente, die $|\lambda\rangle$ vernichtet und Gleiches gilt für ϕ_j oder $\phi_j^\dagger$. (Wegen $j^{0a} = j^{0a\dagger}$ erzeugt j^{0a} auch λ -Bosonen.) Ist $\phi_j = \phi_j^\dagger$, so sind beide Terme in (537) zueinander komplex konjugiert.

6.2.2 Higgs-Mechanismus

Betrachte $V(\Phi)$ wie in (518): Aus dem Goldstone-Theorem folgt:

globale Symmetrie gebrochen $\Rightarrow$ physikalische, masselose Spin 0 Bosonen

Bei einer lokalen Symmetrie entsprechen die „flachen Richtungen“ $T_{jk}^a \phi_{0k}$

$$\text{ („flach“ wegen } \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_l \partial \phi_k} \right|_{\phi=\phi_0} T_{jk}^a \phi_{0k} \stackrel{(524)}{=} 0)$$

unphysikalischen Eichfreiheitsgraden $\Rightarrow$ Brechung der Eichsymmetrie, aber keine physikalischen Goldstone-Bosonen. Was passiert mit den $T_{jk}^a \phi_{0k}$?

Im Standardmodell bricht das Higgs-Feld ϕ die elektroschwache

$$\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \quad (539)$$

Eichsymmetrie zur elektromagnetischen $\text{U}(1)_{em}$. $\text{SU}(2)_L$ bedeutet, dass linkshändige, aber keine rechtshändigen Fermionfelder der $\text{SU}(2)$ - invarianten Wechselwirkung unterliegen. Y , die $\text{U}(1)$ - Quantenzahl in (539) heißt **Hyperladung**. Die $\text{SU}(2)_L$ - Quantenzahl heißt **schwacher Isospin**.

Um $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \rightarrow \text{U}(1)_{em}$ vermöge $\langle 0 | \Phi | 0 \rangle \neq 0$ zu bewirken, darf Φ kein $\text{SU}(2)_L$ - Singulett sein. Die einfachste Möglichkeit hierfür ist ein $\text{SU}(2)$ - Doublett ϕ_i , $i = 1, 2$ mit dem Vakuumserwartungswert

$$\langle 0 | \phi_i | 0 \rangle = v_i \in \mathbb{C} \quad (540)$$

Da $\mathcal{L}$ $\text{SU}(2)$ - invariant ist, können wir alle Felder $\text{SU}(2)_L$ - transformieren, insbesondere:

$$\Phi \rightarrow M\Phi, \quad M \in \text{SU}(2)$$

mit dem einzigen Effekt, dass sich

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (541)$$

transformiert. Mit $v := \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2}$ ist

$$M = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ v_1^* & v_2^* \end{pmatrix} \in \text{SU}(2), \quad M^\dagger M = 1, \quad \det M = 1$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (542)$$

D.h. wir haben die gebrochene Symmetrie ausgenutzt, um den VEV auf die Form (542) zu bringen. v ist dabei reell!

- Hyperladung Y :

$$\Phi_y \rightarrow \exp(i\varphi Y) \Phi_y \quad (543)$$

mit dem Hyperladungsoperator Y

$$Y \Phi_y = y \Phi_y \quad (544)$$

Für $y \neq 0$ bricht die Transformation (542) auch die $\text{U}(1)_Y$ - Symmetrie (543).

- Schwacher Isospin $\vec{I}^2, I_3$

$$\vec{I}^2 \Phi_y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \Phi_y$$

Wir schreiben:

$$\Phi_y(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \quad (545)$$

so dass

$$I_3 \Phi_y = \frac{1}{2} \sigma_3 \Phi_y(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ -\phi^0(x) \end{pmatrix} \quad (546)$$

Die Normierung von Y ist beliebig, denn mit $Y \rightarrow \lambda Y$, $\varphi \rightarrow \varphi/\lambda$ erhält man die selbe $U(1)_Y$ - Transformation, wie in (543). Für unser Higgs-Feld Φ_y wählen wir $y = 1/2$.

Die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ - Transformation

$$\Phi_y \rightarrow \exp(i\varphi Q)\Phi_y \quad (547)$$

$$\text{mit } Q = Y + I_3 \quad (548)$$

bewirkt

$$\begin{aligned} \Phi_{1/2}(x) \rightarrow \exp(i\varphi(Y + I_3))\Phi_{1/2}(x) &= \exp\left(i\frac{\varphi}{2}(\mathbf{1} + \sigma_3)\right)\Phi_{1/2}(x) = \exp\begin{pmatrix} i\varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi_{1/2}(x) \\ &= \begin{pmatrix} \exp(i\varphi)\phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Unser VEV $(0, v)^\top$ in (542) ist invariant bezüglich $\exp(i\varphi Q)$. Wir identifizieren also (547) mit der ungebrochenen $U(1)_{em}$ und Q in (548) mit dem Operator der **elektrischen Ladung**!

Insbesondere ist

$$Q\phi^+ = (Y + I_3)\phi^+ = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\phi^+ = 1 \cdot \phi^+ \Rightarrow q = +1 \quad (549a)$$

$$Q\phi^0 = (Y + I_3)\phi^0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\phi^0 = 0 \Rightarrow q = 0 \quad (549b)$$

D.h. ϕ^+ bzw ϕ^0 hat die elektrische Ladung +1 bzw 0. Die Gleichung (548) $Q = Y + I_3$ heißt **Gell-Mann-Nishima-Relation**. Ein qualitativ anderes Szenario findet man für den Fall $y = 0$ beim Higgsfeld. Dann wäre $U(1)_{em} = U(1)_Y$ und $Q = Y$ und beim β - Zerfall würde sich die elektrische Nukleonladung nicht ändern.

Higgs-Potential Das Higgspotential besitzt diese Form

$$V(\Phi) = -\mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \quad \lambda\mu > 0 \quad (550)$$

Mit Minimum bei $\Phi = (0, v)^\top$:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \phi_j^\dagger} &= -\mu^2\phi_j + 2\lambda(\Phi^\dagger\Phi)\phi_j \Rightarrow 0 = (-\mu^2 + 2\lambda v^2) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ \text{Minimum } v &= \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}} \end{aligned} \quad (551)$$

$$\mathcal{L}_\phi = (\partial_\mu\Phi^\dagger)(\partial^\mu\Phi) - V(\Phi) \quad (552)$$

$$\text{Mit } \phi^0(x) =: v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} + i\frac{G^0(x)}{\sqrt{2}} \quad (553a)$$

$$\phi^+(x) =: G^+(x) \quad (553b)$$

$$\text{und } G^-(x) := [G^+(x)]^\dagger \quad (553c)$$

finden wir in G^+ , G^- und G^0 die Goldstone-Bosonen (in bestimmten Linearkombinationen). Hier ist h das physikalische Higgs-Boson-Feld. Die Higgsmasse ergibt sich aus (550) mit (553), indem man nur die h^2 Beiträge betrachtet:

$$\begin{aligned} \frac{m_h^2}{2} h^2 &\stackrel{!}{=} -\mu^2 \left(v + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \Big|_{h^2 \text{ - Term}} + \lambda \left(v + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^4 \Big|_{h^2 \text{ - Term}} = -\mu^2 \frac{h^2}{2} + 6\lambda \frac{h^2}{2} \\ \Rightarrow m_h^2 &= -\mu^2 + 6\lambda v^2 \end{aligned} \quad (554)$$

Mit (551): $\mu = \sqrt{2\lambda}v$ wird (554) zu $m_h^2 = 4\lambda v^2$, also

$$m_h = 2\sqrt{\lambda}v \quad (555)$$

Eichfelder

$$\text{U}(1)_Y : B^\mu \text{ mit Kopplung } g_1 \quad (556a)$$

$$\text{SU}(2)_L : W^{\mu a} a = 1, 2, 3 \text{ mit Kopplung } g_2 \quad (556b)$$

Linkshändige Leptonen der ersten Generation sind $\text{SU}(2)_L$ -Doubletts

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}_y \quad (557)$$

Aus der Gell-Mann-Nishima-Relation (548) $Q = Y + I_3$, schießen wir mit den *beobachteten Ladungen*

$$\begin{aligned} 0 &= Q(\nu_L) = Y + \frac{1}{2} \\ -1 &= Q(e_L) = Y - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

dass $y = -1/2$ für unser Lepton-Doublett (557). Das Standardmodell liefert *keine* Vorhersage für die Eigenwerte der Hyperladung Y oder der elektrischen Ladung Q !

Rechtshändige Leptonen der ersten Generation sind $\text{SU}(2)_L$ -Singulett

$$e_R = e_{R,y=-1} \quad (558)$$

Ein rechtshändiges Neutrino ν_R hätte wegen $Q(\nu_R) = 0$, $I_3(\nu_R) = 0$ auch $Y(\nu_R) = 0$, es wäre also Singulett bezüglich $\text{SU}(3) \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$ und unterläge keiner Eichwechselwirkung $\Rightarrow$ Es gibt kein ν_R im Standardmodell

Quarks der ersten Generation

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}_{y=+\frac{1}{6}} \quad (559a)$$

$$u_R = u_{R,y=\frac{2}{3}} \quad (559b)$$

$$d_R = d_{R,y=-\frac{1}{3}} \quad (559c)$$

Kovariante Ableitungen

für rechtshändige Fermionfelder: $D_\mu = \partial_\mu - ig_1 Y B_\mu$ (560a)

für linkshändige Fermionfelder: $D_\mu = \partial_\mu - ig_1 Y B_\mu - ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a$ (560b)

Eichkinetischer Term des Higgs-Feldes (552) wird in Gegenwart der Eichwechselwirkungen in (560) zu

$$\mathcal{L}_\Phi = \underbrace{(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)}_{\mathcal{L}_{\Phi, \text{eich}}} - V(\Phi) \quad (561)$$

$$\mathcal{L}_{\Phi, \text{eich}} \stackrel{(553)}{=} \left[D_\mu \left(v + \frac{h}{\sqrt{2}} + i \frac{G^0}{\sqrt{2}} \right) \right]^\dagger D^\mu \left(v + \frac{h}{\sqrt{2}} + i \frac{G^0}{\sqrt{2}} \right) \quad (562)$$

In (560) ersetzen wir die reellen Felder W_μ^1, W_μ^2 durch

$$W_\mu^- := \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) \quad (563a)$$

$$W_\mu^+ = (W_\mu^-)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \quad (563b)$$

Denn:

$$\sigma^1 W_\mu^1 + \sigma^2 W_\mu^2 = \sqrt{2}(\sigma^+ W_\mu^+ + \sigma^- W_\mu^-) \quad (564)$$

$$\text{mit } \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (565)$$

$$\text{also } \sigma^1 W_\mu^1 + \sigma^2 W_\mu^2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix}$$

Vorteil: W_μ^+, W_μ^- sind Eigenvektoren zu I_3 . Adjungierte Darstellung der SU(2) (=Isospin - 1 = Isovektor = definierende Darstellung der SO(3)):

$$I_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (566)$$

(denn $\exp(i\varphi I_3)$ ist Drehung um z-Achse mit Winkel φ)

$$I_3 \cdot \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \stackrel{(566)}{=} \begin{pmatrix} -iW_\mu^2 \\ iW_\mu^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{also } I_3 W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} I_3 (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm W_\mu^1 - iW_\mu^2) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \\ &\Rightarrow I_3 W_\mu^\pm = \pm W_\mu^\pm \end{aligned} \quad (567)$$

Wegen $YW_\mu^a = 0$ sind $W_\mu^\pm$ auch Eigenvektoren zu $Q = Y + I_3$, d.h. $W_\mu^\pm$ hat die elektrische Ladung ± 1 .

B_μ und W_μ^3 sind hingegen ungeladen. B_μ ist Singulett bezüglich $SU(2)_L$ und kann damit keinen Isospin tragen und trägt als Eichfeld der abelschen Gruppe $U(1)_Y$ keine Ladung (denn die adjungierte Darstellung einer abelschen Gruppe ist trivial).

$$\Rightarrow QB_\mu = (Y + I_3)B_\mu = 0$$

W_μ^3 trägt keine Hyperladung und

$$I_3 W_\mu^3 \stackrel{(566)}{=} 0$$

(äquivalent: z-Achse ist Drehachse zu $\exp(i\varphi I_3)$ und damit gilt:)

$$\exp(i\varphi I_3)W_\mu^3 = W_\mu^3 \Rightarrow I_3 W_\mu^3 = 0 \Rightarrow QW_\mu^3 = 0$$

Als physikalische Eichfelder der spontan gebrochenen Theorie erwarten wir also W_μ^+ , W_μ^- und zwei Linearkombinationen aus B_μ und W_μ^3 . Mit (563), (564) und (565) wird (560) übersichtlicher:

$$D_\mu = \partial_\mu - i \begin{pmatrix} g_1 Y B_\mu + \frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 & \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 W_\mu^- & g_1 Y B_\mu - \frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (568)$$

Das Photonfeld A_μ ist eine Linearkombination von B_μ und W_μ^3 . Die zu A_μ orthogonale Linearkombination nennen wir Z_μ . Da wir die Normierung des kinetischen Terms der Eichfelder erhalten müssen:

$$\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + \frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)^2 = \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 + \dots$$

ist nur eine orthogonale Transformation erlaubt:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_W & \sin \vartheta_W \\ -\sin \vartheta_W & \cos \vartheta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (569)$$

ϑ_W heißt **Weinberg-Winkel**. In (549) fanden wir für die beiden Komponenten des Higgs-Feldes die elektrischen Ladungen 0 und +1 für ϕ^0 und ϕ^+ . Also ist die kovariante Ableitung zur ungebrochenen $U(1)_{em}$:

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^+ \text{ und } \partial_\mu \phi^0$$

(mit der elektromagnetischen Kopplungskonstanten e)

Der Vergleich mit (568) zeigt mit $y = 1/2$:

$$\frac{g_1 B_\mu + g_2 W_\mu^3}{2} = eA_\mu + bZ_\mu \quad (570a)$$

$$\frac{g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3}{2} = cZ_\mu \quad \text{mit } b, c \in \mathbb{R} \quad (570b)$$

Einsetzen von (569) in (570) liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1 & -g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} &\stackrel{(570)}{=} \begin{pmatrix} e & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \stackrel{(569)}{=} \begin{pmatrix} e & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ec_W - bs_W & es_W + bc_W \\ -cs_W & cc_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (571)$$

mit $c_W = \cos \vartheta_W$ und $s_W = \sin \vartheta_W$.

Untere Zeile von (571):

$$g_1 = -2cs_W, \quad g_2 = -2cc_W \Rightarrow \tan \vartheta_W = \frac{g_1}{g_2} > 0 \quad (572)$$

(Konvention: $g_1, g_2 > 0$) Wähle $0 < \vartheta_W < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \sin \vartheta_W = \sqrt{\frac{s_W^2}{s_W^2 + c_W^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\tan^2 \vartheta_W}} \stackrel{(572)}{=} \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (573)$$

$$\text{also } \cos \vartheta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (574)$$

$$\text{und } c = -\frac{g_1}{2s_W} = -\frac{1}{2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2}$$

Obere Zeile von (571) multipliziert mit $\cos \vartheta_W$ bzw. $\sin \vartheta_W$:

$$\frac{g_1}{2}c_W = ec_W^2 - bs_Wc_W \quad (575a)$$

$$\frac{g_2}{2}s_W = es_W^2 + bs_Wc_W \quad (575b)$$

Summe von (575)

$$e = \frac{g_1c_W + g_2s_W}{2} \stackrel{(573)(574)}{=} \frac{g_1g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (576)$$

oder nach nochmaligem Anwenden von (573),(574)

$$e = g_2 \sin \vartheta_W = g_1 \cos \vartheta_W \quad (577)$$

Mit (572) sind A_μ und Z_μ in (569) festgelegt und e , die Kopplungskonstante der $U(1)_{em}$, ist in (576) aus g_1 und g_2 bestimmt. (568) wird mit (577) zu

$$D_\mu = \partial_\mu - ie \begin{pmatrix} (Y + \frac{1}{2}) A_\mu - \frac{2Y \tan^2 \vartheta_W - 1}{2 \tan \vartheta_W} Z_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}s_W} W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}s_W} W_\mu^- & (Y - \frac{1}{2}) A_\mu - \frac{2Y \tan^2 \vartheta_W + 1}{2 \tan \vartheta_W} Z_\mu \end{pmatrix} \quad (578)$$

Einsetzen in (562) liefert mit $Y(Z) = 1/2$ direkt die Massen der Eichbosonen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W,Z\text{-Masse}} &= \left[D_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right]^\dagger D^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \Big|_{\text{Massenterme}} \\ &\stackrel{(578)}{=} e^2 v^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}s_W} W_\mu^- & -\frac{\tan^2 \vartheta_W + 1}{2 \tan \vartheta_W} Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}s_W} W^{\mu+} \\ -\frac{\tan^2 \vartheta_W + 1}{2 \tan \vartheta_W} Z^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^2 v^2}{2s_W^2} W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{e^2 v^2}{4s_W^2 c_W^2} Z_\mu Z^\mu \quad \text{mit } \frac{\tan^2 \vartheta_W + 1}{2 \tan \vartheta_W} = \frac{1}{2s_W c_W} \\ &\stackrel{!}{=} M_W^2 W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \end{aligned}$$

$$M_W^2 = \frac{e^2 v^2}{2s_W^2} \stackrel{(577)}{=} \frac{g_2^2 v^2}{2} \quad (579a)$$

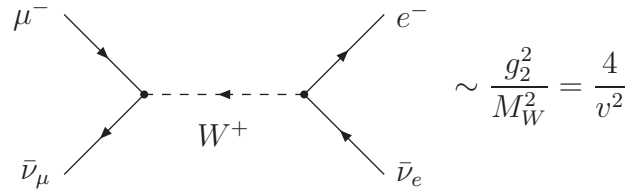
$$M_Z^2 = \frac{e^2 v^2}{2s_W^2 c_W^2} = \frac{g_2^2 v^2}{2c_W^2} \quad (579b)$$

Insbesondere:

$$\frac{M_W}{M_Z} \stackrel{(579)}{=} \cos \vartheta_W \stackrel{(577)}{=} \frac{e}{g_1} \stackrel{(576)}{=} \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (580)$$

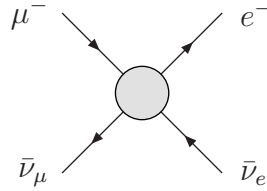
⇒ Spontane Symmetriebrechung impliziert Relationen zwischen M_W, M_Z, e, g_1, g_2 und v . Diese Relationen ermöglichen experimentelle Konsistenztests bzw. Vorhersagen.

Beispiel: Myon-Zerfall



Die Fermikonstante G_F ist definiert über die Myon-Zerfall-Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{\mu L} \gamma_\mu \mu_L \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} \quad (581)$$



Die totale Zerfallsrate ist

$$\Gamma = \frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \left(1 - 8 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} + O\left(\frac{m_e^4}{m_\mu^4}\right) \right) \quad (582)$$

experimentell:

$$\begin{aligned} \tau_\mu &\approx (2,19703 \pm 0,00004) \cdot 10^{-6} \text{ s} \\ \Rightarrow G_F &= (1,16639 \pm 0,00001) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} = (292,8 \text{ GeV})^{-2} \end{aligned} \quad (583)$$

Mit

$$\mathcal{L}_F \supset \bar{L}_1 i \not{D} L_1 + \bar{L}_2 i \not{D} L_2 \supset \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{e}_L W_\nu^- \gamma^\nu \nu_{eL} + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{\mu L} W_\nu^+ \gamma^\nu \mu_L + h.c. \quad (584)$$

(L_k ist das $SU(2)_L$ -Lepton-Doublett der k -ten Generation) ist die Feynman-Regel für die Lepton-W-Neutrino-Kopplung gerade

$$\frac{ig_2}{\sqrt{2}}\gamma_{ij}^\nu \quad \text{für} \quad \frac{g_2}{\sqrt{2}}\bar{\ell}_L W_\nu^- \gamma^\nu \nu_L \quad (585)$$

$$\frac{ig_2}{\sqrt{2}}\gamma_{ij}^\nu \quad \text{für} \quad \frac{g_2}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L W_\nu^+ \gamma^\nu \ell_L = (585)^\dagger$$

Myon-Zerfall (mit $m_\mu \ll M_W$ und Propagator aus (286))

$$i\mathcal{M} = \left(\frac{ig_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \bar{\nu}_{\mu L} \gamma_\nu \mu_L \bar{e}_L \gamma^\nu \nu_{eL} \frac{-i}{-M_W^2}$$

$$\mathcal{M} = -\frac{g_2^2}{2M_W^2} \bar{\nu}_{\mu L} \gamma_\nu \mu_L \bar{e}_L \gamma^\nu \nu_{eL} \quad (586)$$

Vergleich mit dem Matrixelement der Fermi-Theorie (581):

$$\mathcal{M} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{\mu L} \gamma_\nu \mu_L \bar{e}_L \gamma^\nu \nu_{eL}$$

$$\Rightarrow G_F = \frac{g_2^2}{4\sqrt{2}M_W^2} \quad (587)$$

$$G_F \stackrel{(579)}{=} \frac{1}{2\sqrt{2}v^2} \quad (588)$$

Mit (583) finden wir also

$$v = \frac{2^{-3/4}}{\sqrt{G_F}} = 2^{-3/4} \cdot 292,8 \text{ GeV} = 174 \text{ GeV} \Rightarrow \mu/\sqrt{\lambda} \text{ ist bestimmt} \quad (589)$$

$$(555) \Rightarrow m_h = 2\sqrt{\lambda}v < \sqrt{\lambda}348 \text{ GeV} \quad (590)$$

Störungstheorie = Entwicklung in $\frac{\lambda}{4\pi}$

$$\Rightarrow \lambda \lesssim 10 \Rightarrow m_h \lesssim 1,1 \text{ TeV}$$

Die Goldstone Bosonen G^+ , G^- und G^0 in (553) sind unphysikalisch:

Analog zu (541) nutzen wir nun die *lokale* $SU(2)$ - Invarianz aus. Zunächst in der unquantisierten

Theorie:

$$\begin{aligned}
 \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = M(x)\Phi(x) \text{ mit } M(x) \in \text{SU}(2) \\
 \Phi(x) &= \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \stackrel{(553)}{=} \begin{pmatrix} G^+(x) \\ v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} + i\frac{G^0(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 \text{Mit } M(x) &= \frac{1}{\sqrt{\Phi^\dagger(x)\Phi(x)}} \begin{pmatrix} \phi^0(x) & -\phi^+(x) \\ \phi^-(x) & \phi^{0\dagger}(x) \end{pmatrix} \\
 \text{ist } \Phi'(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\Phi^\dagger(x)\Phi(x)} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{591}$$

$$\text{ist } \Phi'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{h'(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{592}$$

D.h. mit der Wahl in (591) haben wir eine bestimmte Eichung festgelegt, in der $\Phi(x)$ nur eine reelle Komponente hat. Weil $\Phi^\dagger(x)\Phi(x) = v^2$ am Minimum des Potentials ist, schreiben wir:

$$\sqrt{\Phi^\dagger(x)\Phi(x)} =: v + \frac{h'(x)}{\sqrt{2}} \tag{593}$$

$$\text{und es gilt } \Phi'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{h'(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{594}$$

in dieser sogenannten **unitären Eichung**. Alle unphysikalischen Freiheitsgrade sind verschwunden und nur $h'(x)$ wird quantisiert. $\mathcal{L}_\Phi$ in (561) wird in der unitären Eichung zu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\phi &= \left[D_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right]^\dagger D^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \mu^2 \left(v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 - \lambda \left(v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + M_W^2 W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{M_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu \quad \text{mit (554), (578) und (579)} \\
 &\quad + (h^2 + 2\sqrt{2}vh) \left[\frac{e^2}{4s_W^2} W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{e^2}{8s_W^2 c_W^2} Z_\mu Z^\mu \right] \\
 &\quad - \frac{m_h^2}{2} h^2 - \sqrt{2}\lambda v h^3 - \frac{\lambda}{4} h^4 + \mu^2 v^2 - \lambda v^4
 \end{aligned} \tag{595}$$

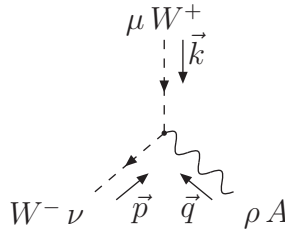
(mit der irrelevanten Konstanten $\mu^2 v^2 - \lambda v^4$)

Die Higgs-Higgs-Z-Kopplung aus $(D_\mu h)^\dagger D^\mu h$ verschwindet wegen

$$(\partial_\mu h) \frac{ie}{2s_W c_W} Z^\mu h - \frac{ie}{2s_W c_W} Z^\mu h (\partial^\mu h) = 0$$

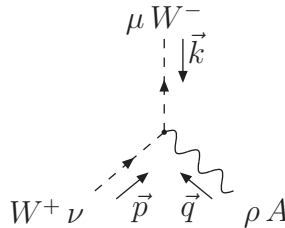
Zusammen mit dem kinetischen Term der W- und Z-Bosonen und des Photons

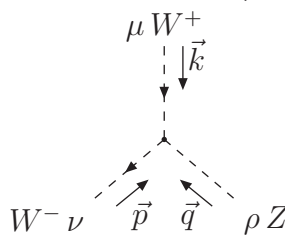
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{kin} &= \frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a) (\partial^\mu W^{\nu a} - \partial^\nu W^{\mu a}) + \frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \\
 &\stackrel{(563)(569)}{=} \frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) (\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-}) \\
 &\quad + \frac{1}{4} (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 + \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2
 \end{aligned} \tag{596}$$



$$-ie(g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu) \quad (599)$$

Der Ladungsfluss ist wichtig:

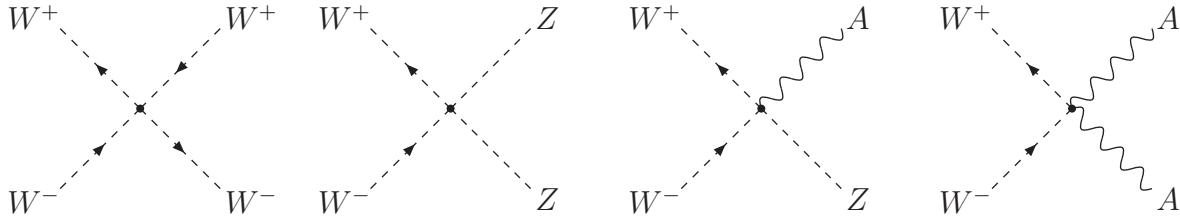


$$+ie(g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu)$$


$$+ie \cot \vartheta_W (g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu) \quad (600)$$

Dreierkopplungen wurden bei LEP-II gemessen

Es gibt 4 Viererkopplungen:



6.2.3 Übersicht über das Standardmodell

Eichgruppe

$$\text{SU}_C(3) \times \text{SU}_L(2) \times \text{U}_Y(1)$$

Quantenzahlen ($j = 1, 2, 3$ Generationen)

Fermionen

$$\begin{aligned} L_j &= \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau_L \end{pmatrix} & (1, 2, -1/2) \\ l_{Rj} &= e_R, \mu_R, \tau_R & (1, 1, -1) \\ Q_j &= \begin{pmatrix} u_L \\ d_R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} & (3, 2, 1/6) \\ u_{Rj} &= u_R, c_R, t_R & (3, 1, 2/3) \\ d_{Rj} &= d_R, s_R, b_R & (3, 1, -1/3) \end{aligned} \quad (601)$$

Eichbosonen

$$\begin{array}{ll} B_\mu & (1,1,0) \\ W_\mu^a & a = 1, 2, 3 \quad (1,3,0) \end{array} \quad (602)$$

Physikalische Felder

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &\stackrel{(563)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \\ A_\mu &\stackrel{(569)}{=} \cos \vartheta_W B_\mu + \sin \vartheta_W W_\mu^3 \\ Z_\mu &\stackrel{(569)}{=} -\sin \vartheta_W B_\mu + \cos \vartheta_W W_\mu^3 \end{aligned}$$

Higgs

$$\Phi = \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}}h + \frac{i}{\sqrt{2}}G^0 \right) \quad (1,2,1/2) \quad (604)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Physikalisches Feld} & : \quad h \\ \text{(Pseudo-)Goldstone Bosonen} & : \quad G^\pm, G^0 \end{array}$$

(Pseudo, da keine globale Symmetrie gebrochen wird, sondern eine lokale, die den Eichfreiheitsgraden entspricht.)

6.3 Yukawa-Sektor

Fermion-Massen:

$$-m_e \bar{L}_1 e_R$$

mit dem SU(2)-Doublett $\bar{L}_1$ und dem SU(2)-Singulett e_R ist nicht SU(2) invariant.
 $\Rightarrow$ Higgs-Feld Φ muss auch Fermionmassen generieren

$$\mathcal{L} \supset -y_e \underbrace{\bar{L}_1 \Phi e_R}_{\substack{\text{SU(2)-Singulett} \\ \text{U(1)}_Y\text{-Singulett}}} + h.c. \quad (604)$$

mit der dimensionslosen Yukawa-Kopplungskonstanten y_e . $\bar{L}_1 \Phi e_R$ ist also SU(2)_L- invariant und hat Dimension 4.

3 Generationen

$$\mathcal{L} \supset - \sum_{j,k=1}^3 Y_{jk}^\ell \bar{L}_j \Phi \ell_{Rk} + h.c. \quad (605)$$

 $Y_{jk}^\ell : 3 \times 3\text{-Yukawa-Matrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$

Der Eichsektor der Leptonen hat eine globale U(3) $\times$ U(3)-**Flavour-Symmetrie**.

$$U^L, U^R \in \text{U}(3) : L_j \longmapsto U_{jk}^L L_k \quad (606a)$$

$$\ell_j \longmapsto U_{jk}^R \ell_k \quad (606b)$$

Denn z.B.

$$\sum_{j=1}^3 \bar{L}_j i \not{D} L_j \xrightarrow{(606)} \sum_{j,k,k'=1}^3 \bar{L}_k \underbrace{U_{kj}^{L\dagger} i \not{D} U_{jk'}^L}_{U_{kj}^{L\dagger} U_{jk'}^L = \delta_{kk'}} L_{k'} = \sum_{k=1}^3 \bar{L}_k i \not{D} L_k$$

Unter der Transformation (606) ist (605) *nicht* invariant, sondern

$$\sum_{j,k=1}^3 \bar{L}_j \Phi Y_{jk}^\ell \ell_{Rk} \xrightarrow{(606)} \sum_{j,j,k,k'=1}^3 \bar{L}_{j'} \Phi \underbrace{U_{j'j}^{L\dagger} Y_{jk}^\ell U_{kk'}^R}_{\hat{Y}_{j'k'}^\ell} \ell_{Rk'} \quad (607)$$

d.h. wir können (606) ausnutzen, um Y_{jk}^ℓ in eine einfachere Matrix $\hat{Y}_{jk}^\ell$ zu überführen:

$$\hat{Y}^\ell = U^{L\dagger} Y^\ell U^R \quad (608)$$

Theorem: Mit einer **bi-unitären Transformation** (608) lässt sich jede Matrix $Y \in \mathbb{C}^{N \times N}$ auf Diagonalgestalt $\hat{Y} = \text{diag}(y_1, \dots, y_N)$ mit $y_i \geq 0$ bringen.

Beweis:

Jede Matrix hat eine Polarzerlegung:

$$Y = HV, \quad H = H^\dagger, \quad V^\dagger V = 1 \quad (609)$$

$\exists U^L \in \text{U}(N) : U^{L\dagger} H U^L = \text{diag}(h_1, \dots, h_N) = \hat{H}$ mit $h_i \in \mathbb{R}$

$$Y = U^L \hat{H} U^{L\dagger} V = U^L \underbrace{\begin{pmatrix} |h_1| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |h_N| \end{pmatrix}}_{\hat{Y}} \underbrace{\begin{pmatrix} \text{sgn } h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \text{sgn } h_N \end{pmatrix}}_{U^{R\dagger} \in \text{U}(N)} U^{L\dagger} V = U^L \hat{Y} U^{R\dagger}$$

qed.

Berechnung von $U^L, U^R, \hat{Y}^\ell$ in (608):

$$Y^{\ell\dagger} Y^\ell \stackrel{(608)}{=} (U^R \hat{Y}^{\ell\dagger} U^{L\dagger})(U^L \hat{Y}^\ell U^{R\dagger}) = U^R (\hat{Y}^\ell)^2 U^{R\dagger}$$

$$Y^\ell Y^{\ell\dagger} \stackrel{(608)}{=} (U^L \hat{Y}^\ell U^{R\dagger})(U^R \hat{Y}^{\ell\dagger} U^{L\dagger}) = U^L (\hat{Y}^\ell)^2 U^{L\dagger}$$

$$\Rightarrow (\hat{Y}^\ell)^2 = \begin{pmatrix} y_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_N^2 \end{pmatrix} = U^{R\dagger} Y^{\ell\dagger} Y^\ell U^R \quad (610)$$

$$\text{und } (\hat{Y}^\ell)^2 = U^{L\dagger} Y^\ell Y^{\ell\dagger} U^L \quad (611)$$

U^R, U^L erhält man durch diagonalisieren von $Y^{\ell\dagger} Y^\ell$ bzw. $Y^\ell Y^{\ell\dagger}$. Damit können wir für die Yukawa-Kopplungen der Leptonen o.B.d.A

$$\mathcal{L}_Y^\ell = - \sum_{\ell=e,\mu,\tau} y_\ell \bar{L}_\ell \Phi \ell_R + h.c. \quad (612)$$

wählen. $\mathcal{L}_Y^\ell$ ist **flavour-diagonal**. Mit (553) finden wir die **Massenterme**

$$-\sum_{\ell=e,\mu,\tau} y_\ell v \bar{\ell}_L \ell_R + h.c. \Rightarrow m_\ell = y_\ell v \quad (613)$$

$$y_e = \frac{m_e}{v} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \text{ GeV}}{174 \text{ GeV}} \approx 3 \cdot 10^{-6} \quad (614a)$$

$$y_\mu = \frac{m_\mu}{v} = \frac{0,11 \text{ GeV}}{174 \text{ GeV}} \approx 6 \cdot 10^{-4} \quad (614b)$$

$$y_\tau = \frac{m_\tau}{v} = \frac{1,77 \text{ GeV}}{174 \text{ GeV}} \approx 10^{-2} \quad (614c)$$

Quarks Eichsektor:

$$\begin{array}{ccccc} \text{U}(3) & \times & \text{U}(3) & \times & \text{U}(3) & \text{- Flavoursymmetrie} \\ Q_j & & d_{Rj} & & u_{Rj} & j = 1, 2, 3 \end{array}$$

6.3.1 Yukawa-Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_Y^d = - \sum_{j,k=1}^3 \bar{Q}_j \Phi Y_{jk}^d d_{Rk} + h.c. \quad (615)$$

$$\begin{aligned} \text{VEV: } \Phi &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ M_{jk}^d &:= Y_{jk}^d v \end{aligned} \quad (616)$$

heißt **Down-Massenmatrix**.

Mit $S^{dL}, S^{dR} \in \text{U}(3)$

$$S^{dL\dagger} Y^d S^{dR} = \hat{Y}^d = \text{diag}(y_d, y_s, y_b) \quad (617)$$

ist also (analog zu (608))

$$S^{dL\dagger} M^d S^{dR} = \hat{M}^d = \text{diag}(m_d, m_s, m_b) \quad (618)$$

Erinnerung: Mit Φ ist auch $\Phi^c := \varepsilon \Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} & -\phi^- \end{pmatrix}^\top$ ein $\text{SU}(2)$ -Doublett

$$\mathcal{L}_Y^u = - \sum_{j,k=1}^3 \bar{Q}_j \Phi^c Y_{jk}^u u_{Rk} + h.c. \quad (619)$$

gibt also den up-artigen Quarks seine Masse

$$\begin{aligned} \text{VEV: } \Phi^c &\longmapsto \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \\ M_{jk}^u &:= Y_{jk}^u v \end{aligned} \quad (620)$$

ist die **up-Massenmatrix**.

$$S^{uL\dagger} M^u S^{uR} = \hat{M}^u = \text{diag}(m_u, m_c, m_t) \quad (621)$$

Jedoch: Die $U(3)^3$ -Flavoursymmetrie des Eichsektors erfordert $S^{dL} = S^{uL}$. Mit

$$Q \longmapsto S^{uL} Q : d \longmapsto S^{dR} d_R, \quad u_R \longmapsto S^{uR} u_R$$

finden wir aus (615)

$$\mathcal{L}_Y^d = - \sum_{j,j',k,k'=1}^3 \bar{Q}_{j'} \Phi S_{j'j}^{uL\dagger} Y_{jk}^d S_{kk'}^{dR} d_{Rk'} \quad (622)$$

und

$$S^{uL\dagger} Y^d S^{dR} = S^{uL\dagger} S^{dL} S^{dL\dagger} Y^d S^{dR} \stackrel{(617)}{=} S^{uL\dagger} S^{dL} \hat{Y}^d =: V \hat{Y}^d \quad (623)$$

mit der Cabbibo-Kobajashi-Maskawa (CKM) - Matrix

$$V = S^{uL\dagger} S^{dL} \in U(3) \quad (624)$$

D.h. o.B.d.A. $Y^u = \hat{Y}^u$ diagonal und

$$Y^d = V \hat{Y}^d \quad (625)$$

Um Y^d zu diagonalisieren, transformieren wir

$$d_{Lj} \longmapsto \sum_{k=1}^3 V_{jk} d_{Lk} \quad (626)$$

so dass

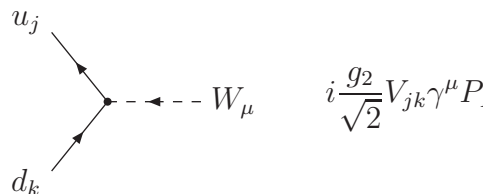
$$\sum_{j,n=1}^3 \bar{d}_{Lj} Y_{jn}^d d_{Rn} \stackrel{(625)}{=} \sum_{j,k',n=1}^3 \bar{d}_{Lj} V_{jk'} \hat{Y}_{k'n}^d d_{Rn} \stackrel{(626)}{\longmapsto} \sum_{j,k,k',n=1}^3 \bar{d}_{Lk} \underbrace{V_{kj}^\dagger V_{jk'}}_{\delta_{kk'}} \hat{Y}_{k'n}^d d_{Rn} = \sum_{k,n=1}^3 \bar{d}_{Lk} \hat{Y}_{kn}^d d_{Rn} \quad (627)$$

(626) ist nicht $SU(2)_L$ -invariant.

Die Basis für u^L, d^L, u^R, d^R mit diagonalen Yukawa-Matrizen heißt Basis der **Masseneigenzustände** (MEZ). Die Basis mit (625) ist eine von vielen Basen aus (Eich-) **Wechselwirkungs-zuständen** (WEZ). In der Basis der MEZ ist $(u_{Lj} \ d_{Lj})^\top$ kein $SU(2)_L$ -Doublett und

$$\mathcal{L}_{eich} \supset \frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^3 \bar{u}_{Lj} \gamma^\mu d_{Lj} W_\mu^\dagger + h.c. \stackrel{(626)}{\longmapsto} \frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^3 \bar{u}_{Lj} \gamma^\mu V_{jk} d_{Lk} W_\mu^\dagger + h.c. \quad (628)$$

$\Rightarrow$ Die CKM-Matrix taucht in den W-Kopplungen an Quarks auf.

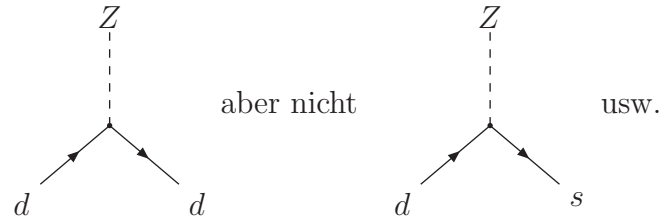


$$i \frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{jk} \gamma^\mu P_L \quad (629)$$

Die CKM-Matrix verschwindet jedoch aus den Kopplungen des Z-Bosons und des Photons ($U_\mu = Z_\mu$ oder A_μ) (und des Gluons)

$$\sum_{j=1}^3 \bar{d}_{Lj} \gamma^\mu d_{Lj} U_\mu \xrightarrow{(626)} \sum_{j,k,n=1}^3 \bar{d}_{Lj} \underbrace{V_{jk}^\dagger V_{kn}}_{\delta_{jn}} \gamma^\mu d_{Ln} U_\mu = \sum_{j=1}^3 \bar{d}_{Lj} \gamma^\mu d_{Lj} U_\mu$$

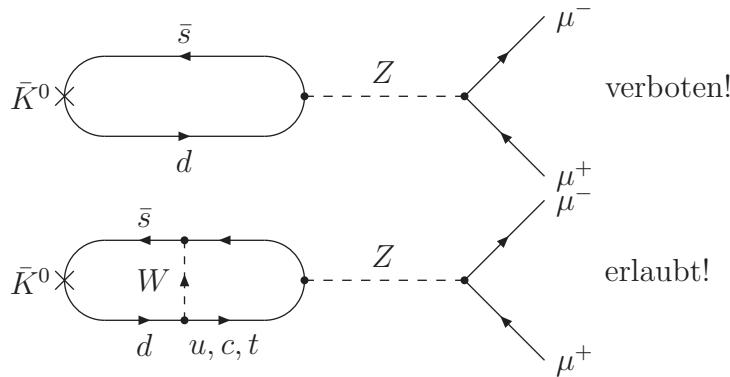
$\Rightarrow$ Es gibt keine **flavour-ändernden neutralen Ströme** (FCNC) auf Baumgraph-Niveau im SM, also:



Diese Konsequenz der Unitarität von V heißt **GIM-Mechanismus** (nach Glashow, Iliopoulos, Maiani)

Historisch: Die beobachtete starke Unterdrückung des Zerfalls $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ hat GIM zum Postulat des *Charm-Quarks* veranlasst.

$$|K_L\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle_{\sim \bar{s}d} - |\bar{K}^0\rangle_{\sim s\bar{d}})$$



Man schreibt gerne V_{ub} statt V_{13} usw.

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (630)$$

Gelegentlich bezeichnet man die Wechselwirkungseigenzustände, für die die Yukawa-Matrix die Form (625) hat und manifest $SU(2)_L$ invariant sind, mit

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}$$

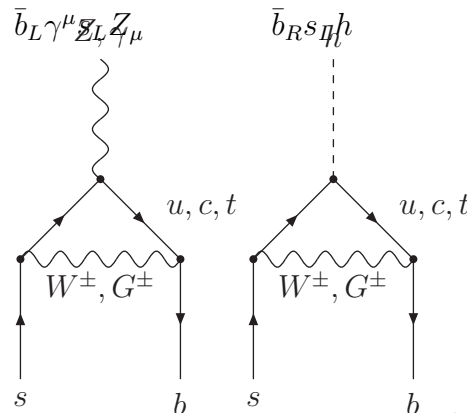
Die $G^\pm$ - Kopplungen enthalten V_{ij} wie die $W_\mu^\pm$ - Kopplungen. Die G^0 - und h - Kopplungen sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^d &\supset - \sum_{j,n=1}^3 \bar{d}_{Lj}' Y_{jn}^d d_{Rn} \left(v + \frac{h + iG^0}{\sqrt{2}} \right) \stackrel{(625)}{=} - \sum_{j,k,n=1}^3 \bar{d}_{Lj}' V_{jk} \hat{Y}_{kn}^d d_{Rn} \left(v + \frac{h + iG^0}{\sqrt{2}} \right) \\ &\stackrel{(626)}{=} - \sum_{k,n=1}^3 \bar{d}_{Lk} \hat{Y}_{kn}^d d_{Rn} \left(v + \frac{h + iG^0}{\sqrt{2}} \right) = - \sum_{k=1}^3 \bar{d}_{Lk} \hat{Y}_{kk}^d d_{Rk} \left(v + \frac{h + iG^0}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (631)$$

$$\mathcal{L}_Y^u \supset - \sum_{k=1}^3 \bar{u}_k^L \hat{Y}_{kk}^u u_{Rk} \left(v + \frac{h + iG^0}{\sqrt{2}} \right) \quad (632)$$

d.h. die Kopplungen von G^0 und h sind flavour-diagonal!

FCNC-Kopplungen von γ, Z, g und h sind über Schleifen möglich: z.B.



Die diagonalen Yukawa-Kopplungen (631), (632) haben eine $U(1)^6$ - Symmetrie

$$u_{L,Rj} \longmapsto \exp(i\varphi_j^u) u_{L,Rj} \quad j = 1, 2, 3 \quad (633a)$$

$$d_{L,Rj} \longmapsto \exp(i\varphi_j^d) d_{L,Rj} \quad j = 1, 2, 3 \quad (633b)$$

Die $W_\mu^\pm$ und $G^\pm$ - Kopplungen haben diese Symmetrie nicht. Wir können (633) ausnutzen, um V zu vereinfachen. Unter (633) transformieren sich V_{ij} wie

$$V_{ij} \longmapsto \exp(i(\varphi_j^d - \varphi_i^u)) V_{ij} \quad (634)$$

Eine unitäre 3×3 Matrix ist durch 3 Winkel und 6 Phasen charakterisiert.

Die 5 unabhängigen Differenzen $\varphi_j^d - \varphi_i^u$ in (634) erlauben es, 5 Phasen aus V zu eliminieren und bis zu 5 Elemente positiv zu wählen. Die verbleibende Phase γ ist physikalisch und heißt **Kobayashi-Maskawa Phase**. Man wählt

$$\gamma = \arg \left(-\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}} \right) \quad (635)$$

Man verifiziert leicht, dass unter (634):

$$\begin{aligned} V_{ud} &\longmapsto \exp(i(\varphi_1^d - \varphi_1^u)) V_{ud} \\ V_{ub}^* &\longmapsto \exp(i(\varphi_3^d - \varphi_1^u)) V_{ub}^* \\ V_{cd} &\longmapsto \exp(i(\varphi_1^d - \varphi_2^u)) V_{cd} \\ V_{cb}^* &\longmapsto \exp(i(\varphi_3^d - \varphi_2^u)) V_{cb}^* \end{aligned}$$

die KM-Phase γ invariant ist. Die PDG-Konvention ist:

$$\begin{aligned} V_{ud}, V_{us}, V_{cb}, V_{tb} & \text{ positiv} \\ \arg V_{ub}^* & \stackrel{(635)}{=} \delta_{13} = \gamma + \underbrace{\arg(-V_{cd})}_{O(0,1^\circ)} \end{aligned} \quad (636)$$

(Nur V_{ub}, V_{td} haben große Phasen) Das SM hat eine verbleibende, globale U(1)-Symmetrie mit $\varphi_1^d = \dots = \varphi_3^u = \varphi_B$, die zur Erhaltungsgröße **Baryonenzahl** gehört. Im Lepton-Sektor (ohne ν -Massen) gibt es 3 U(1)-Quantenzahlen, die den drei **Lepton-Zahlen** L_e, L_μ, L_τ entsprechen.

CP-Verletzung: Man betrachtet die Paritätstransformation P und die Ladungskonjugation C

$$P : \psi(x^\mu) \mapsto \exp(i\varphi_P) \gamma^0 \psi(x_\mu) \quad (637a)$$

$$C : \psi(x^\mu) \mapsto -i \exp(i\varphi_C) \gamma^2 \psi^*(x^\mu) \quad (637b)$$

mit beliebigen Phasen φ_P, φ_C , die für jedes Fermion-Multiplett verschieden sein können.

P und C transformieren linkshändige in rechtshändige Felder

$\Rightarrow$ Das SM verletzt P und C .

Jedoch CP verknüpft Felder der gleichen Chiralität:

$$CP : \psi_{L,R} \mapsto \exp(i\varphi_{CP}) (-i\gamma^2 \gamma^0) \psi_{L,R}^* = \exp(i\varphi_{CP}) (-i\gamma^2) \bar{\psi}_{L,R}^\top \quad (638)$$

Alle Eichwechselwirkungen *erhalten* CP.

z.B. bleibt

$$\frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{u}_L \gamma^\mu d'_L W_\mu^+ + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{d}'_L \gamma^\mu u_L W_\mu^- \xrightarrow{CP} \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{d}'_L \gamma^\mu u_L W_\mu^- + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{u}_L \gamma^\mu d'_L W_\mu^+$$

unverändert, weil g_2 reell ist. Für die Yukawa-Wechselwirkung ist hingegen:

z.B. (615):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^d &= - \sum_{j,k=1}^3 Y_{jk}^d \bar{Q}_j \Phi d_k^R - \sum_{j,k=1}^3 Y_{jk}^{d*} \bar{d}_k^R \Phi^\dagger Q_j \\ &\xrightarrow{CP} - \sum_{j,k=1}^3 Y_{jk}^d \exp(i(\varphi_{CP,k}^d - \varphi_{CP,j}^Q)) \bar{d}_k^R \Phi^\dagger Q_j - \sum_{j,k=1}^3 Y_{jk}^{d*} \exp(-i(\varphi_{CP,k}^d - \varphi_{CP,j}^Q)) \bar{Q}_j \Phi d_k^R \end{aligned} \quad (639)$$

Können wir Phasen $\varphi_{CP,k}^d, \varphi_{CP,j}^Q$ finden, so dass alle $Y_{jk}^d \exp(i(\varphi_{CP,k}^d - \varphi_{CP,j}^Q))$ reell sind, so ist (639) CP-invariant.

Äquivalent: Können wir mit U(1)-Transformationen in (633) alle Y_{jk}^d reell machen, so ist (639)

CP-invariant mit $\varphi_{CP,k}^d = \varphi_{CP,j}^Q = 0$

$\Rightarrow$ Der Yukawa-Sektor verletzt i.A. die CP-Symmetrie

In der Masseneigenzustandsbasis sitzt die CP-Verletzung in den CKM-Matrixelementen, die die W_μ -Kopplungen multiplizieren:

$$\begin{aligned} & \frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{ij} \bar{u}_i \gamma_\mu P_L d_j W^{\mu+} + \frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{ij}^* \bar{d}_j \gamma_\mu P_L u_i W^{\mu-} \\ & \xrightarrow{CP} \frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{ij} \exp(i(\varphi_{CP,j}^d - \varphi_{CP,i}^u)) \bar{d}_j \gamma^\mu P_L u_i W_\mu^- + \frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{ij}^* \exp(-i(\varphi_{CP,j}^d - \varphi_{CP,i}^u)) \bar{u}_i \gamma^\mu P_L d_j W_\mu^+ \end{aligned}$$

ist nur CP-invariant für $V_{ij} \exp(2i(\varphi_{CP,j}^d - \varphi_{CP,i}^u)) = V_{ij}^*$

Äquivalent: Die W_μ -Kopplungen an Quarks sind genau dann CP-erhaltend, wenn man geeignete U(1)-Transformationen in (633) wählen kann, so dass V_{ij} reell ist.

$V_{ij} \notin \mathbb{R}$ bedeutet für γ in (635): $\gamma \neq 0 \vee \gamma \neq \pi$

Aus (638) und (640) ist klar, dass die Phasenkonventionen von V_{ij} und der CP-Transformation verknüpft sind. Wählen wir $V_{ij}(\gamma = 0) \in \mathbb{R}$, so kommen nur $\varphi_{CP} = 0$ und $\varphi_{CP} = \pi$ in (638) in Frage.

In der Standardkonvention $\varphi_{CP,j}^{d,u,Q} = 0$ ist.

$$\bar{u}_L \gamma_\mu d_L \xrightarrow{CP} -\bar{d}_L \gamma^\mu u_L \quad (641a)$$

$$\bar{q}_{L,R} \gamma_\mu q_{L,R} \xrightarrow{\quad} -\bar{q}_{L,R} \gamma^\mu q_{L,R} \quad (641b)$$

$$G_\mu^a T^a \xrightarrow{CP} -G^{\mu a} T^{a\top} \quad (642a)$$

$$W_\mu^a T^a \xrightarrow{\quad} -W^{\mu a} \sigma^{a\top} \quad (642b)$$

$$B_\mu \xrightarrow{\quad} -B^\mu \quad (642c)$$

Wegen $\sigma^{1\top} = \sigma^1, \sigma^{3\top} = \sigma^3, \sigma^{2\top} = -\sigma^2$ ist also

$$W_\mu^\pm \xrightarrow{CP} -W^{\pm\mu} \quad (643)$$

(642) impliziert

$$A^\mu \xrightarrow{CP} -A_\mu \quad \text{Photon hat QZ } J^{PC} = 1^{--} \quad (644a)$$

$$Z^\mu \xrightarrow{\quad} -Z_\mu \quad (644b)$$

Def:

- Ein Vektor V_μ ist P -ungerade ($P = -1$), wenn er sich wie $V_\mu \xrightarrow{P} V^\mu$ transformiert
- Ein Vektor V_μ ist C -ungerade ($C = -1$), wenn er sich wie $V_\mu \xrightarrow{C} -V_\mu$ transformiert

Das Gluon hat wie das Photon $P = -1$, aber es ist wegen (siehe (642)) $T^{a\top} = T^{a*} \neq T^a$ kein Eigenzustand zu C , genauso wie (wegen $\sigma^{2\top} = -\sigma^2$) $W_\mu^\pm$ kein Eigenzustand zu C ist, sondern $W_\mu^+ \xrightarrow{C} -W_\mu^-$.

$C = -1$ wäre auch im Widerspruch zu

$$C = +1 \left\{ \begin{array}{l} \text{diagram with two wavy lines meeting at a vertex} \\ \text{diagram with two wavy lines meeting at a vertex} \end{array} \right. C = -1$$

Aber: Die QCD-Lagrangedichte (505) erhält wie die QCD C, P und T :

$$\bar{q}_i \gamma_\mu T_{ij}^a q_j G^{\mu,a} \xrightarrow{C} \bar{q}_j \gamma_\mu T_{ji}^a q_i G^{\mu,a} \quad \text{usw.}$$

CKM-Matrix

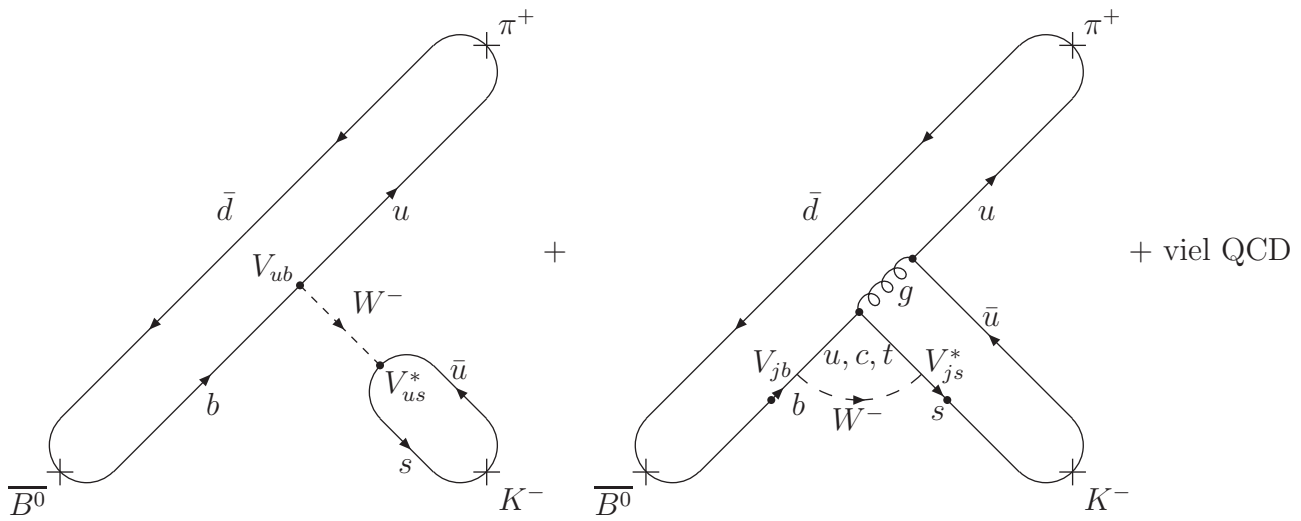
$$V = \begin{pmatrix} \underline{0,98} & \underline{0,22} & 4 \cdot 10^{-3} \exp(-i\gamma) \\ -\underline{0,22} & \underline{0,98} & \underline{4 \cdot 10^{-2}} \\ 8 \cdot 10^{-3} \exp(-i\beta) & -4 \cdot 10^{-2} & \underline{0,999} \end{pmatrix} \quad (645)$$

mit $\delta_{13} \approx \gamma \approx 70^\circ$, $\beta \approx 21^\circ$

Exakt reelle Werte sind unterstrichen.

Beispiele für eine CP-Asymmetrie (sogenannte **direkte CP-Asymmetrie**)

$$A_{CP}^{dir}(\overline{B^0} \rightarrow K^- \pi^+) := \frac{\Gamma(\overline{B^0} \rightarrow K^- \pi^+) - \Gamma(B^0 \rightarrow K^+ \pi^-)}{\Gamma(\overline{B^0} \rightarrow K^- \pi^+) + \Gamma(B^0 \rightarrow K^+ \pi^-)} \quad (646)$$



$$\overline{\mathcal{A}} =: \underbrace{V_{ub}V_{us}^* \tilde{T}}_{\text{„tree“}} + \underbrace{V_{ub}V_{us}^* \tilde{P}^u}_{\text{„penguin“}} + \underbrace{V_{cb}V_{cs}^* \tilde{P}^c}_{\text{„penguin“}} + \underbrace{V_{tb}V_{ts}^* \tilde{P}^t}_{\text{„penguin“}}$$

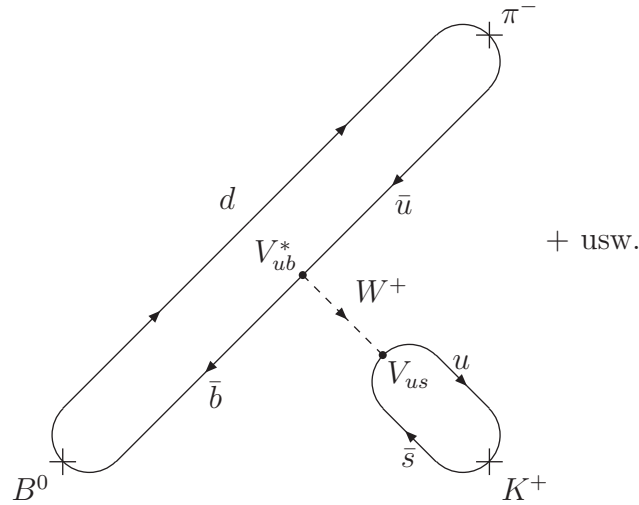
Nutz man die Unitarität von V aus, $V_{cb}V_{cs}^* = -V_{ub}V_{us}^* - V_{tb}V_{ts}^*$, so ist mit

$$\left. \begin{aligned} T &:= \tilde{T} + \tilde{P}^u - \tilde{P}^c \\ P &:= \tilde{P}^t - \tilde{P}^c \end{aligned} \right\} \text{ unberechenbar wegen QCD}$$

gerade

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}} &= V_{ub}V_{us}^* T + V_{tb}V_{ts}^* P =: \lambda_u^* T + \lambda_t^* P \\ \text{mit } \lambda_i &= V_{ib}^* V_{is}, \quad i = u, c, t \end{aligned} \quad (647)$$

Im CP-konjugierten Prozess ist also gerade



Das Matrixelement zu $B^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ ist gerade

$$-\mathcal{A} = V_{ub}^* V_{us} T + V_{tb}^* V_{ts} P = \lambda_u T + \lambda_t P \quad (648a)$$

(Achtung $\overline{\mathcal{A}} \neq \mathcal{A}^*$) mit den selben T, P wie in (647), denn die QCD ist CP - erhaltend.
Ursache des Minuszeichens: Die Konvention:

$$CP | B^0 \rangle = - | \overline{B^0} \rangle \quad (648b)$$

Wegen $\Gamma(\overline{B^0} \rightarrow K^- \pi^+) \propto |\overline{\mathcal{A}}|^2$, $\Gamma(B^0 \rightarrow K^+ \pi^-) \propto |\mathcal{A}|^2$ ist also A_{CP}^{dir} in (646):

$$A_{CP}^{dir}(\overline{B^0} \rightarrow K^- \pi^+) = \frac{|\overline{\mathcal{A}}|^2 - |\mathcal{A}|^2}{|\overline{\mathcal{A}}|^2 + |\mathcal{A}|^2} \stackrel{(647)(648a)}{=} \frac{|\lambda_0|^2 |T|^2}{|\lambda_0|^2 |T|^2} \cdot \frac{\left|1 + \frac{\lambda_t^* P}{\lambda_u^* T}\right|^2 - \left|1 + \frac{\lambda_t P}{\lambda_u T}\right|^2}{\left|1 + \frac{\lambda_t^* P}{\lambda_u^* T}\right|^2 + \left|1 + \frac{\lambda_t P}{\lambda_u T}\right|^2} \quad (649)$$

In

$$\frac{P}{T} := r \exp(i\delta), \quad r \approx 0,11 \pm 0,05$$

und

$$\frac{\lambda_t}{\lambda_u} \approx \left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right| \exp(-i\gamma)$$

aus (645) wenn man $\arg(-V_{ts})$ vernachlässigt, bezeichnet man $\begin{Bmatrix} \delta \\ \gamma \end{Bmatrix}$ als $\begin{Bmatrix} \text{starke} \\ \text{schwache} \end{Bmatrix}$ bzw.

$\begin{Bmatrix} CP\text{-erhaltende} \\ CP\text{-verletzende} \end{Bmatrix}$ Phase. (649) wird wegen

$$\begin{aligned} \left|1 + \frac{\lambda_t^* P}{\lambda_u^* T}\right|^2 &= 1 + 2 \left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right| r \cos(\delta + \gamma) + \left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right|^2 r^2 \\ \left|1 + \frac{\lambda_t P}{\lambda_u T}\right|^2 &= 1 + 2 \left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right| r \cos(\delta - \gamma) + \left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right|^2 r^2 \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned}
A_{CP}^{dir}(\overline{B}^0 \rightarrow K^- \pi^+) &= \frac{\left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right| r [\cos(\delta + \gamma) - \cos(\delta - \gamma)]}{1 + \left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right| r [\cos(\delta + \gamma) + \cos(\delta - \gamma)] + \left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right|^2 r^2} \\
&= \frac{2r \left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right| \sin \delta \sin \gamma}{1 + 2r \left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right| \cos \delta \cos \gamma + \left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right|^2 r^2}
\end{aligned} \tag{650}$$

wegen $\cos(\delta \pm \gamma) = \cos \delta \cos \gamma \mp \sin \delta \sin \gamma$. Mit (645) finden wir

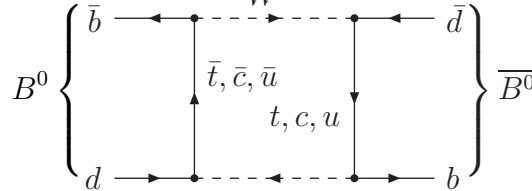
$$\begin{aligned}
\left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right| &= \left| \frac{V_{tb} V_{ts}}{V_{ub} V_{us}} \right| \approx 45, & \left| \frac{\lambda_t}{\lambda_u} \right| r &\approx 5, 0 \\
&\Rightarrow A_{CP}^{dir}(\overline{B}^0 \rightarrow K^- \pi^+) \approx 0, 32 \cdot \sin \delta \\
\text{Experimentell} &: A_{CP}^{dir}(\overline{B}^0 \rightarrow K^- \pi^+) = -0, 095 \pm 0, 013 \\
&\Rightarrow \delta \approx -17, 2^\circ
\end{aligned} \tag{651}$$

Man findet nur eine kleine starke Phase δ . Die Form (648a) für eine direkte CP -Asymmetrie ist allgemein, lediglich $|\lambda_t/\lambda_u|, \gamma, r, \delta$ sind durch andere Werte zu ersetzen. Eine nicht verschwindende, direkte CP -Asymmetrie erfordert zwei interferierende Amplituden mit unterschiedlichen starken und schwachen Phasen, d.h. $\delta \neq 0$ und $\gamma \neq 0$. Direkte CP -Asymmetrien sind in der Regel nutzlos, um schwache Phasen zu bestimmen.

Am Besten zur Bestimmung von CP -Phasen geeignet:

Mischungsinduzierte CP -Asymmetrie.

Meson-Antimeson-Mischung Beispiel: $B^0 - \overline{B}^0$ Mischung $B^0 \sim \bar{b}d, \overline{B}^0 \sim b\bar{d}$



$\Delta B = 2$ - Amplitude, $M_{B^0} \approx 5, 2 \text{ GeV}$, $M_{B^0} \ll M_W, m_t$

Die Schleife wird durch das Top-Quark dominiert

$\Rightarrow$ langsame Oszillationen zwischen B^0 und $\overline{B}^0$.

Schrödinger-Bild: Zeitentwicklung ohne Oszillationen

Zerfall:

$$|B(t)\rangle = \exp\left(-iMt - \frac{1}{2}\Gamma t\right) |B(0)\rangle \tag{652}$$

(M : Masse = Energie im Ruhesystem) denn Wahrscheinlichkeit für ein unzerfallenes B nach Zeit t :

$$\begin{aligned}
P &\propto \langle B(t)|B(t)\rangle = \underbrace{\left| \exp\left(-iMt - \frac{1}{2}\Gamma t\right) \right|^2}_{\exp(-\Gamma t)} \langle B(0)|B(0)\rangle \\
(652) &\Rightarrow i \frac{d}{dt} |B(t)\rangle = \left(M - \frac{i}{2}\Gamma\right) |B(t)\rangle
\end{aligned} \tag{653}$$

$\hat{=}$ Schrödinger-Gleichung mit nicht-hermiteschem „Hamilton-Operator“ $M - \frac{i}{2}\Gamma$.

Mit $B^0 - \overline{B}^0$ Mischung verallgemeinert sich (653) zu

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} |B^0(t)\rangle \\ |\overline{B}^0(t)\rangle \end{pmatrix} = \left(M - \frac{i}{2}\Gamma \right) \begin{pmatrix} |B^0(t)\rangle \\ |\overline{B}^0(t)\rangle \end{pmatrix} \quad (654)$$

mit der **Massenmatrix** $M = M^\dagger$ und der Zerfallsmatrix $\Gamma = \Gamma^\dagger$. $|B^0(t)\rangle$ bezeichnet ein B -Meson-Ket, der bei $t = 0$ ein $|B^0\rangle$ war („flavour tagging“). Für $t > 0$ ist $|B(t)\rangle$ eine Superposition aus $|B^0\rangle$ und $|\overline{B}^0(t)\rangle$, die aus (654) berechnet werden kann.

$$\begin{aligned} CPT\text{-invarianz} \Rightarrow \quad M_{11} &= M_{22} (= 5,2 \text{ GeV}) \\ \Gamma_{11} &= \Gamma_{22} \left(= \frac{1}{1,5 \text{ ps}} = 0,5 \text{ meV} \right) \end{aligned}$$

Entartung der Eigenwerte aufgehoben durch $M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \neq 0$. Eigenkets ($\hat{=}$ Masseneigenzustände)

$$\text{„B light“ } |B_L\rangle = p |B^0\rangle + q |\overline{B}^0\rangle \quad (655a)$$

$$\text{„B heavy“ } |B_H\rangle = p |B^0\rangle - q |\overline{B}^0\rangle \quad (655b)$$

$$\text{mit } |p|^2 + |q|^2 = 1$$

Eigenwerte von $M - \frac{i}{2}\Gamma$:

$$M_L - \frac{i}{2}\Gamma_L, \quad M_H - \frac{i}{2}\Gamma_H \quad (656)$$

$$|B_{L,H}(t)\rangle = \exp(-(iM_{L,H} + \Gamma_{L,H}/2)t) |B_{L,H}(0)\rangle \quad (657)$$

$$M := \frac{M_L + M_H}{2} = M_{11} \quad \Gamma := \frac{\Gamma_L + \Gamma_H}{2} = \Gamma_{11} \quad (658a)$$

$$\Delta m := M_H - M_L > 0, \quad \Delta \Gamma := \Gamma_L - \Gamma_H \quad (658b)$$

Lösung des Eigenwertproblems (Einsetzen von (655),(657) in (654)) liefert:

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} &= -\frac{\Delta m + \frac{i}{2}\Delta \Gamma}{2M_{12} - i\Gamma_{12}}, \quad \frac{p}{q} = -\frac{\Delta m + \frac{i}{2}\Delta \Gamma}{2M_{12}^* - i\Gamma_{12}^*} \\ \Rightarrow (\Delta m)^2 - \frac{1}{4}(\Delta \Gamma)^2 + i\Delta m \Delta \Gamma &= 4|M_{12}|^2 - |\Gamma_{12}|^2 - 2iM_{12}^*\Gamma_{12} - 2iM_{12}\Gamma_{12}^* \end{aligned}$$

$$\frac{q}{p} = -\frac{\Delta m + \frac{i}{2}\Delta \Gamma}{2M_{12} - i\Gamma_{12}} \quad (659a)$$

$$(\Delta m)^2 - \frac{1}{4}(\Delta \Gamma)^2 = 4|M_{12}|^2 - |\Gamma_{12}|^2 \quad (659b)$$

$$\Delta m \Delta \Gamma = -4 \operatorname{Re} M_{12} \Gamma_{12}^* \quad (659c)$$

Drei Observable in der $B^0 - \overline{B}^0$ Mischung $\Delta m, \Delta\Gamma$ und

$$\phi = \arg \left(-\frac{M_{12}}{\Gamma_{12}} \right) \quad (660)$$

Im B^0 -System: $|\Gamma_{12}| \ll |M_{12}|, \Delta\Gamma \ll \Delta m$

$$(659) \Rightarrow \Delta m = 2|M_{12}| [1 + O(|\Gamma_{12}/M_{12}|^2)] \quad (661)$$

$$\Delta\Gamma = 2|\Gamma_{12}| \cos \phi [1 + O(|\Gamma_{12}/M_{12}|^2)] \quad (662)$$

$$\frac{q}{p} = -\exp(-i\phi_M) \left[1 - \frac{a}{2} \right] + O(|\Gamma_{12}/M_{12}|) \quad (663)$$

$$\begin{aligned} -\frac{M_{12}}{\Gamma_{12}} &\stackrel{(660)}{=} \left| \frac{M_{12}}{\Gamma_{12}} \right| (\cos \phi + i \sin \phi) \Rightarrow i|\Gamma_{12}| \cos \phi = -|M_{12}| \left(a + i \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} \right) \\ \frac{q}{p} &\stackrel{(659)}{=} -\frac{\Delta m + \frac{i}{2}\Delta\Gamma}{2M_{12} - i\Gamma_{12}} \stackrel{(661)(662)}{\approx} -\frac{2|M_{12}| + i|\Gamma_{12}| \cos \phi}{2M_{12} - i\Gamma_{12}} [1 + O(|\Gamma_{12}/M_{12}|^2)] \\ &= -\exp(-i\phi_M) \left[1 - \frac{a}{2} - \frac{i}{2} \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} \right] [1 + O(|\Gamma_{12}/M_{12}|^2)] \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} M_{12} &= |M_{12}| \exp(i\phi_M) \\ a &= \operatorname{Im} \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} = \left| \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} \right| \sin \phi \end{aligned}$$

(ϕ_M ist konventionsabhängig und unphysikalisch. $a \approx -5 \cdot 10^{-4}$ ist fast überall vernachlässigbar.)

Betrachte: $B^0(t) \rightarrow f$ (Literatur: [3, S. 1-67])

Ist $dN(B^0(t) \rightarrow f)$ die Zahl der Zerfälle im Intervall $[t, t+dt]$, so definiert man die zeitabhängige Zerfallsrate

$$\Gamma(B^0(t) \rightarrow f; t) = \frac{1}{N_B} \frac{dN(B^0(t) \rightarrow f)}{dt} \quad (664)$$

N_B = Gesamtzahl der bei $t = 0$ produzierten B^0

$$\Gamma(B^0(t) \rightarrow f; t) = N_f |\langle f | B^0(t) \rangle|^2 \quad (665a)$$

$$\Gamma(\overline{B}^0(t) \rightarrow f; t) = N_f |\langle f | \overline{B}^0(t) \rangle|^2 \quad (665b)$$

mit einer Normierungskonstanten N_f aus der Phasenraumintegration etc.

Mit den Zerfallsamplituden $A_f = \langle f | B^0 \rangle, \overline{A}_f = \langle f | \overline{B}^0 \rangle$ kann man

$$\lambda_f := \frac{q}{p} \frac{\overline{A}_f}{A_f} \cong -\exp(-i\phi_M) \left[1 - \frac{a}{2} \right] \frac{\overline{A}_f}{A_f} \quad (666)$$

definieren (λ_f ist physikalisch).

Vernachlässigen wir $\Delta\Gamma$ und a , so ist

$$\Gamma(B^0(t) \rightarrow f; t) = N_f |A_f|^2 \exp(-\Gamma t) \left\{ \frac{1 + |\lambda_f|^2}{2} + \frac{1 - |\lambda_f|^2}{2} \cos(\Delta m t) - \text{Im } \lambda_f \sin(\Delta m t) \right\} \quad (667)$$

$$\Gamma(\overline{B}^0(t) \rightarrow f; t) = N_f |A_f|^2 \exp(-\Gamma t) \left\{ \frac{1 + |\lambda_f|^2}{2} - \frac{1 - |\lambda_f|^2}{2} \cos(\Delta m t) + \text{Im } \lambda_f \sin(\Delta m t) \right\} \quad (668)$$

Ein **flavour-spezifischer** Endzustand $f = f_{fs}$ ist durch $A_f \neq 0, \overline{A}_f = 0$ charakterisiert.

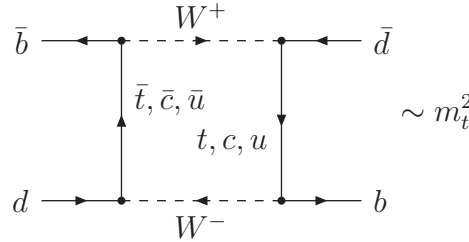
Beispiel: $f_{fs} = X \ell^+ \bar{\nu}_\ell$ (X : irgendwas) Dann ist $\lambda_f = 0$ und (667),(668) wird zu:

$$\begin{aligned} \Gamma(B^0 \rightarrow f_{fs}; t) &= N_f |A_f|^2 \exp(-\Gamma t) \frac{1 + \cos(\Delta m t)}{2} \\ \Gamma(\overline{B}^0 \rightarrow f_{fs}; t) &= N_f |A_f|^2 \exp(-\Gamma t) \frac{1 - \cos(\Delta m t)}{2} \end{aligned}$$

Die **Mischungsasymmetrie** ist dann

$$A_0(t) = \cos(\Delta m t) \quad (669)$$

$\Rightarrow$ Entdeckung der $B^0 - \overline{B}^0$ Mischung beim ARGUS-Experiment am DESY



$$\begin{aligned} \Delta m &= 0,50 \text{ ps}^{-1} = 0,35 \text{ meV} \\ \frac{\Delta m}{M} &= \frac{0,35 \cdot 10^{-12} \text{ GeV}}{5,2 \text{ GeV}} = 7 \cdot 10^{-14} \text{ messbar, da} \\ \frac{\Delta m}{\Gamma} &= \Delta m \cdot \tau = 0,75 \end{aligned}$$

also fast genau eine Oszillation pro Lebensdauer. Ist f ein CP -Eigenzustand,

$$CP | f \rangle = \eta_f | f \rangle$$

mit $\left\{ \begin{array}{l} \eta_f = 1 \\ \eta_f = -1 \end{array} \right\}$ für einen $\left\{ \begin{array}{l} CP\text{-geraden} \\ CP\text{-ungeraden} \end{array} \right\}$ Endzustand, so kann man **zeitabhängige CP-Asymmetrie** studieren:

$$A_{CP}(\overline{B}^0 \rightarrow f; t) := \frac{\Gamma(\overline{B}^0 \rightarrow f; t) - \Gamma(B^0 \rightarrow f; t)}{\Gamma(\overline{B}^0 \rightarrow f; t) + \Gamma(B^0 \rightarrow f; t)} \stackrel{(667)(668)}{=} -A_{CP}^{dir} \cos(\Delta m t) - A_{CP}^{mix} \sin(\Delta m t) \quad (670)$$

mit der **direkten CP-Asymmetrie**:

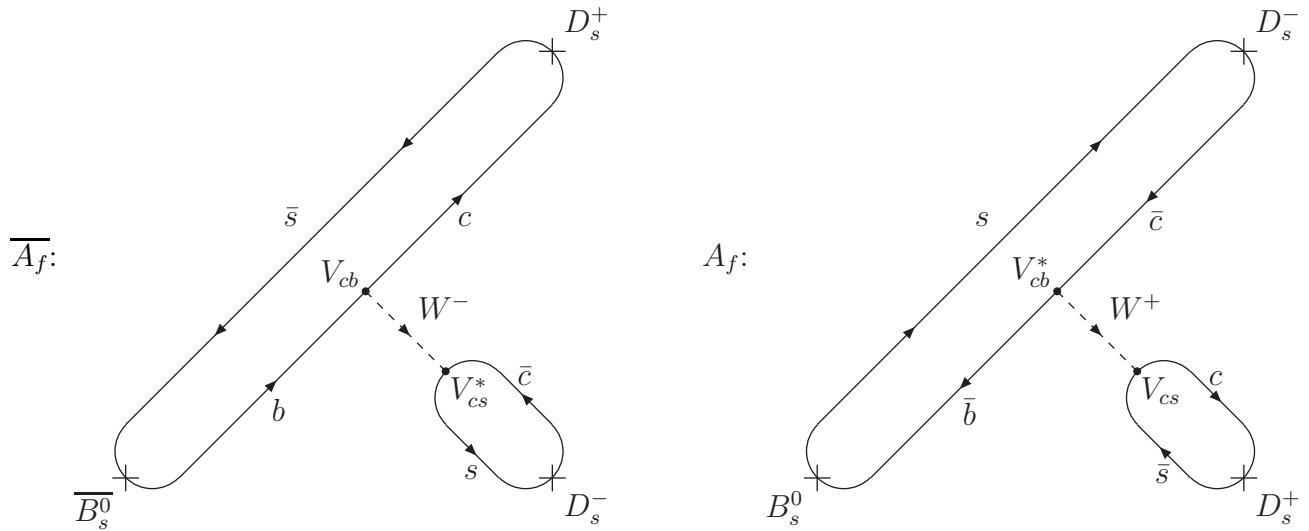
$$A_{CP}^{dir}(\overline{B}^0 \rightarrow f) = \frac{1 - |\lambda_f|^2}{1 + |\lambda_f|^2} \stackrel{(666)}{=} \frac{|A_f|^2 - |\overline{A}_f|^2}{|A_f|^2 + |\overline{A}_f|^2} \quad (671)$$

und der **mischungsinduzierten CP-Asymmetrie**

$$A_{CP}^{mix}(\overline{B}^0 \rightarrow f) = \frac{-2 \operatorname{Im} \lambda_f}{1 + |\lambda_f|^2} \quad (672)$$

Besonders praktisch sind Zerfälle, zu denen nur eine Amplitude (d.h. nur eine schwache Phase) beiträgt, z.B. weil $|P| \ll |T|$. Dann ist (siehe (649)) $|A_f| = |\overline{A}_f|$ und $\arg(\overline{A}_f/A_f)$ ist einfach durch CKM-Elemente gegeben.

Beispiel: $B_s \rightarrow D_s^+ D_s^-$



Für $|A_f| = |\overline{A}_f|$ (wie hier)

$$\frac{\overline{A}_f}{A_f} = -\eta_f \exp(2i\varphi_f) \quad (673)$$

mit CP -Phase φ_f („–“ wegen $CP|B^0\rangle = -|\overline{B}^0\rangle$, $CP|f\rangle = \eta_f|\overline{f}\rangle$)

Im Beispiel ist

$$\begin{aligned} f &= D_s^+ D_s^- : CP|f\rangle = |f\rangle \Rightarrow \eta_f = +1 \text{ und} \\ \frac{\overline{A}_f}{A_f} &= -\frac{V_{cb}V_{cs}^*}{V_{cb}^*V_{cs}} \Rightarrow \varphi_f = \arg(V_{cb}V_{cs}^*) \end{aligned} \quad (674)$$

Mit $\phi_M = \arg((V_{tb}V_{ts}^*)^2)$ ist (wegen $\exp(i \arg z^2) = z^2/|z|^2 = z/z^*$):

$$\frac{q}{p} \stackrel{(663)}{=} -\exp(-i\phi_M) = -\frac{V_{tb}^*V_{ts}}{V_{tb}V_{ts}^*} \text{ für } a=0 \quad (675)$$

$$\text{und } \lambda_f \stackrel{(666)}{=} \frac{q}{p} \frac{\overline{A}_f}{A_f} \stackrel{(674)(675)}{=} \frac{V_{tb}^*V_{ts}}{V_{tb}V_{ts}^*} \frac{V_{cb}V_{cs}^*}{V_{cb}^*V_{cs}} = -\exp(-2i\beta_s) \quad (676)$$

$$\text{wobei } \beta_s = \arg\left(-\frac{V_{ts}V_{tb}^*}{V_{cs}V_{cb}^*}\right) \cong \arg(-V_{ts}) \approx 0,02$$

mit der Standard-Phasenkonvention

$\Rightarrow \text{Im } \lambda_f = \sin(2\beta_s)$ und (672) wird zu

$$A_{CP}^{mix}(\overline{B}_s^0 \rightarrow D_s^+ D_s^-) = -2 \sin(2\beta_s) \quad (677)$$

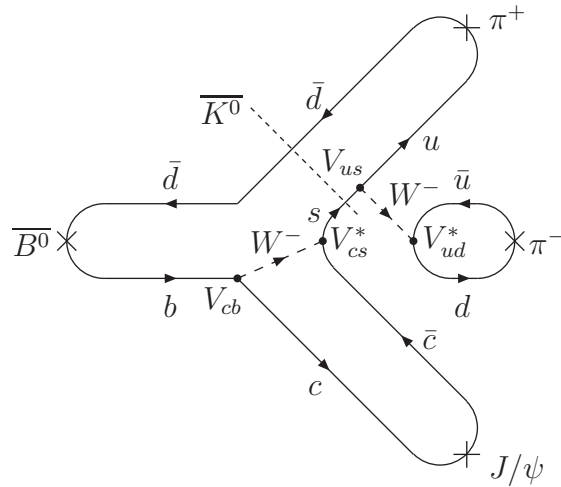
$\Rightarrow$ LHCb-Experiment

Der Klassiker mischungs-induzierter CP -Asymmetrie ist: $A_{CP}^{mix}(\overline{B}_d^0 \rightarrow J/\psi K_s)$. J/ψ ist ein $c\bar{c}$ -Bindungszustand

$$\begin{aligned} |K_s\rangle &\cong \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} = & |K_L\rangle \\ &\text{„K-short“} &= \text{„K-Light“} \\ &\text{wobei } CP|K^0\rangle = -|K^0\rangle \end{aligned} \quad (678)$$

$K_s \rightarrow \pi\pi$ ist dominant, $K_L = K_H$ zerfällt fast immer in 3 Pionen. ($K^0 \sim \bar{s}d$, $\bar{K}^0 \sim s\bar{d}$)
Was gemessen wird, ist $K^0, \bar{K}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$

$$\overline{A_f} = \underbrace{\langle \pi^+\pi^- | \bar{K}^0 \rangle}_{\sim V_{us}V_{ud}^*} \underbrace{\langle J/\psi | \overline{B}^0 \rangle}_{\sim V_{cs}^*V_{cb}}$$



$$\Rightarrow \frac{\overline{A_f}}{A_f} = -\eta_f \frac{V_{us}^* V_{ud} V_{cs}^* V_{cb}}{V_{us} V_{ud}^* V_{cs} V_{cb}^*} \quad (679)$$

Was ist η_f ?

$$J/\psi \text{ hat } J^{PC} = 1^{--} \Rightarrow CP = +1$$

$$(\pi^+\pi^-)_{K_s} \text{ hat } J^{PC} = 0^{--} \Rightarrow CP = +1$$

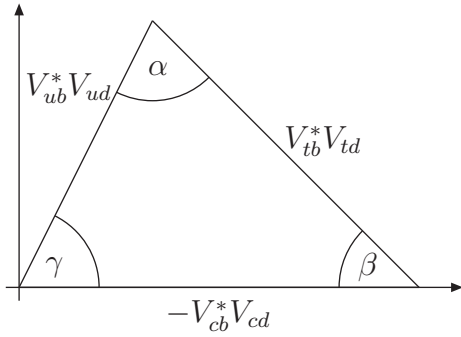
$$\text{Drehimpuls: } B^0, \bar{B}^0 \text{ hat Spin } 0 \Rightarrow J = 0 \text{ im Endzustand}$$

$$S_{J/\psi} = 1 \Rightarrow L = 1 \text{ („p-Welle“) } \Rightarrow CP = -1$$

$$\Rightarrow \eta_f = (+1)(+1)(-1) = -1$$

$$(666), (679) \Rightarrow \lambda_f = \frac{q}{p} \frac{\overline{A_f}}{A_f} = -\frac{V_{tb}^* V_{td} V_{us}^* V_{ud} V_{cs}^* V_{cb}}{V_{tb} V_{td}^* V_{us} V_{ud}^* V_{cs} V_{cb}^*} \approx -\exp(-2i\beta) \quad (680)$$

In Standard-Phasenkonvention:



$$V_{td} = |V_{td}| \exp(-i\beta)$$

$$V_{ub} = |V_{ub}| \exp(-i\gamma)$$

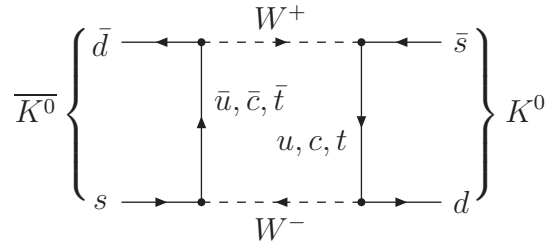
$$V_{ub}^* V_{ud} + V_{tb}^* V_{td} + V_{cb} V_{cd}^* = 0$$

Mit (672) ist also:

$$\begin{aligned} A_{CP}^{mix}(\overline{B}_d^0 \rightarrow J/\psi K_s) &= -\sin(2\beta) \\ \text{experimentell: } A_{CP}^{mix}(\overline{B}_d^0 \rightarrow J/\psi K_s) &= -0,68 \pm 0,03 \Rightarrow \beta \approx 21^\circ \end{aligned} \quad (681)$$

CP-Verletzung im Kaon-System

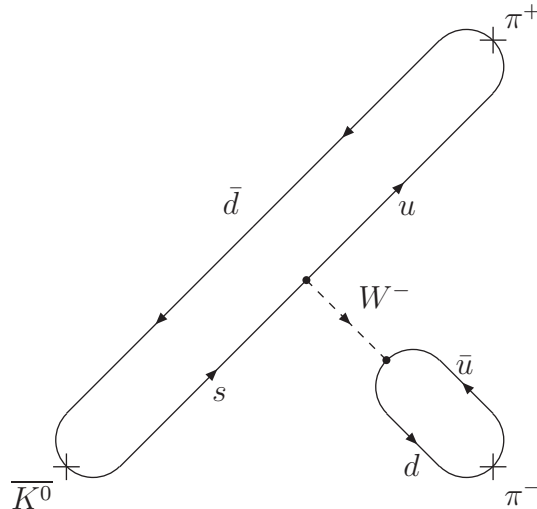
Kaon-Mischung



$$\text{„K-short“} \quad |K_s\rangle = |K_L\rangle = p |K^0\rangle + q |\overline{K}^0\rangle \quad (682a)$$

$$\text{„K-long“} \quad |K_l\rangle = |K_H\rangle = p |K^0\rangle - q |\overline{K}^0\rangle \quad (682b)$$

- K_s zerfällt dominant in $\pi^+\pi^-$ und $\pi^0\pi^0$
- K_l zerfällt dominant in $\pi^+\pi^-\pi^0$ und $\pi^0\pi^0\pi^0$



Wegen $|V_{ts}V_{td}| \ll |V_{cs}V_{cd}| \approx |V_{us}V_{ud}|$ ist die $K^0 - \bar{K}^0$ Amplitude durch u und c dominiert
 $\Rightarrow$ keine große CP -Phase in

$$\lambda_f \approx \underbrace{\frac{V_{us}V_{ud}^*}{V_{us}^*V_{ud}}}_{-\frac{\bar{A}_f}{A_f}} \underbrace{\frac{V_{cs}V_{cd}^*}{V_{cs}^*V_{cd}}}_{-\frac{q}{p}} \approx \text{reell}$$

CP ist fast immer erhalten bei K_s, K_l - Zerfällen in Pionen
 $\Rightarrow K_s$ und K_l sind fast immer CP -Eigenzustände.

Häufig verwendete Konvention:

$$|K_s\rangle = \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2(1+|\bar{\varepsilon}|^2)}} + \bar{\varepsilon} \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2(1+|\bar{\varepsilon}|^2)}} \quad (683a)$$

$$|K_l\rangle = \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2(1+|\bar{\varepsilon}|^2)}} + \bar{\varepsilon} \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2(1+|\bar{\varepsilon}|^2)}} \quad (683b)$$

also

$$(682), (683) \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{1+q/p}{1-q/p}$$

Wäre CP eine exakte Symmetrie, so wäre $K_l \rightarrow \pi^+\pi^-$ verboten, denn mit $\bar{\varepsilon} = 0$ ist K_l CP -ungerade, aber $\pi\pi$ ist CP -gerade. Nachteil: q/p ist phasenkonventionsabhängig und muss auf die Phasenkonvention $CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$ abgestimmt werden.

Aus der **semileptonischen CP -Asymmetrie**

$$\delta(l) = \frac{\Gamma(K_l \rightarrow \ell^+ \nu_\ell \pi^-) - \Gamma(K_l \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell \pi^+)}{\underbrace{\Gamma(K_l \rightarrow \ell^+ \nu_\ell \pi^-)}_{K_0 \text{ zerfällt, es geht } p \text{ ein}} + \underbrace{\Gamma(K_l \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell \pi^+)}_{\bar{K}^0 \text{ zerfällt, es geht } q \text{ ein}}} \stackrel{(682)}{=} \frac{1-|q/p|^2}{1+|q/p|^2} = \frac{2 \operatorname{Re} \bar{\varepsilon}}{1+|\bar{\varepsilon}|^2} \quad (684)$$

$$\stackrel{(\text{exp})}{\approx} (3,27 \pm 0,12) \cdot 10^{-3}$$

findet man mit (659) und den Messwerten

$$\Delta m_K = 0,53 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \quad \Delta \Gamma = 1,12 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

dass die CP -Phase aus (660),

$$\phi = (6,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \quad (685)$$

klein ist. (siehe [3, Kapitel 1.6])

3 Arten von CP -Verletzung in Meson-Zerfällen

1. CP -Verletzung in der Mischung = indirekte CP -Verletzung

$$\left| \frac{q}{p} \right| \neq 1 \quad (686)$$

$\delta(l)$ in (684) misst $\mathcal{CP}$ in der Mischung

$$(663) \Rightarrow 1 - \left| \frac{q}{p} \right|^2 = 1 - \left(1 - \frac{a}{2} \right)^2 = a + O(a^2) = \operatorname{Im} \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} \quad (687)$$

(686) impliziert, dass

$$\left[M - \frac{i}{2}\Gamma, CP \right] \neq 0$$

ist, die Eigenzustände $|B_L\rangle, |B_H\rangle$ bzw. $|K_s\rangle, |K_l\rangle$ also keine CP -Eigenzustände sind (vgl. (683)):

$$CP = \begin{pmatrix} 0 & -\exp(i\xi) \\ -\exp(-i\xi) & 0 \end{pmatrix} \quad \xi \text{ beliebig} \quad (688)$$

denn

$$CP \begin{pmatrix} |B^0\rangle \\ |\overline{B^0}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\exp(i\xi) |\overline{B^0}\rangle \\ -\exp(-i\xi) |B^0\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{Standardkonvention: } \xi = 0) \quad (689)$$

$$\left[M - \frac{i}{2}\Gamma, CP \right] = 2i \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \quad (690)$$

$$\text{mit } A = \exp(i\xi) \left(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \right) - \exp(-i\xi) \left(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^* \right)$$

$$= 2i \operatorname{Im} (\exp(i\xi) M_{12}) + \operatorname{Im} (\exp(i\xi) \Gamma_{12})$$

$$\operatorname{Im} A = 0 \Leftrightarrow \xi + \arg(M_{12}) = 0 \bmod \pi$$

$$\operatorname{Re} A = 0 \Leftrightarrow \xi + \arg(\Gamma_{12}) = 0 \bmod \pi$$

(690) = 0 ist also nur erfüllbar für

$$\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} \in \mathbb{R}, \text{ also } a = \operatorname{Im} \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} = 0 \text{ bzw. } \left| \frac{q}{p} \right| = 1$$

2. Direkte CP -Verletzung

Es ist $|\bar{f}\rangle = CP|f\rangle$. Ist nun

$$\left| \frac{\overline{A_{\bar{f}}}}{A_f} \right| \neq 1 \quad (691)$$

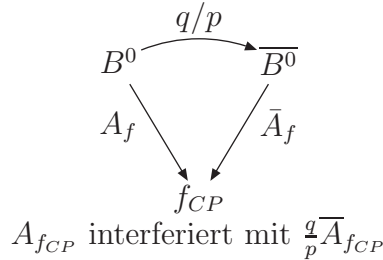
$$\Rightarrow A_{CP}^{dir} \neq 0 \text{ in (649)}$$

3. Mischungsinduzierte CP -Verletzung (= $\mathcal{C}P$ in der Interferenz von Mischung und Zerfall)

Für $f = f_{CP}$ mit $CP|f_{CP}\rangle = \eta_{CP}|f_{CP}\rangle$

$$\operatorname{Im} \lambda_f = \operatorname{Im} \frac{q}{p} \frac{\overline{A_{f_{CP}}}}{A_{f_{CP}}} \neq 0 \quad (692)$$

$$\Rightarrow A_{CP}^{mix} \neq 0 \text{ in (672)}$$



(Funktioniert auch mit nicht CP -Eigenzuständen).

6.4 CP -Verletzung und Baryogenese

Baryogenese = Erzeugung des Überschusses von Materie über Antimaterie im Universum

Annahme: Beim Urknall war die Baryonzahl des Universums $= 0$

n_b = Teilchendichte der Baryonen

$n_{\bar{b}}$ = Teilchendichte der Anti-Baryonen

n_γ = Teilchendichte der Photonen

$n_B = n_b - n_{\bar{b}}$ Baryonenzahldichte

Beobachtung: $n_{\bar{b}} \ll n_b$

6.4.1 Baryonen-Asymmetrie des Universums (BAU)

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \simeq \frac{n_b}{n_\gamma} \sim 10^{-10} \quad (693)$$

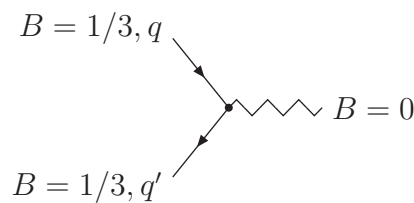
Im Jahr 1967 formulierte Andrei Sacharow vier Bedingungen für die Generierung von $\eta \neq 0$ aus einer Anfangsbedingung mit $\eta = 0$:

1. Baryonenzahlverletzung
2. C -Verletzung
3. CP -Verletzung
4. Thermisches Nichtgleichgewicht („Zeitpfeil“)

Erläuterungen:

Sacharow-Bedingung 1): Die elementaren, perturbativen Wechselwirkungen des Standardmodells erhalten die Baryonzahl B :

$$\begin{aligned} \text{U}(1)_B : q &\mapsto \exp(iB\varphi)q \\ B &= \frac{1}{3}, \quad q = u, d, s, c, b, t \end{aligned} \quad (694)$$



Ebenso die Leptonenzahl L

$$\begin{aligned} \text{U}(1)_L : \ell &\mapsto \exp(iL\varphi)\ell \\ \ell &= e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \end{aligned}$$

Störungstheorie untersucht Feldfluktuationen um das Minimum der klassischen Wirkung S , d.h. um $W_\mu^a \sim 0$. 't Hooft fand 1976, dass Feldkonfigurationen mit $W_\mu^a \sim \frac{1}{g_2}$, sog. **Sphaleronen**

Übergänge zwischen Zuständen mit unterschiedlichen Quantenzahlen B, L erzeugen können. Sie verletzen $B + L$, erhalten aber $B - L$

Wirkungsquerschnitt (mit $\alpha_2 = \frac{g_2}{4\pi}$, $g_2 = \text{SU}(2)$ -Eichkopplung):

$$\sigma_{\cancel{B+L}} \propto \underbrace{\exp\left(-\frac{4\pi}{\alpha_2}\right)}_{\substack{\text{Taylorreihe um } \alpha_2=0 \text{ ist } \equiv 0 \\ \Rightarrow \text{nichtpertubativ}}} \sim 10^{-164}$$

Bisher: Quantenfeldtheorie bei Temperatur $T = 0$.

Für Kosmologie braucht man QFT für $T > 0$ (siehe [4])

Die Energiebarriere für Sphaleron-Übergänge ist

$$E_{sph}(T) = \frac{4\pi}{g_2} v_T f\left(\frac{\lambda}{g_2}\right) \quad (695)$$

mit der Higgs-Selbstkopplung λ und

$$\begin{aligned} v_T &= \langle 0 | \phi_0 | 0 \rangle_T = \text{Higgs-VEV bei Tempertatur } T \\ 1,6 &\leq f\left(\frac{\lambda}{g_2}\right) \leq 2,7, \text{ denn } \lambda \text{ noch unbekannt} \end{aligned}$$

Bei hohen Temperaturen ist die elektroschwache Symmetrie ungebrochen, $v_T = 0$

$$\lambda = \frac{m_h^2}{4v_{T=0}^2} \quad (696)$$

(siehe (555))

Der **elektroschwache Phasenübergang** von $v_T = 0$ zu $v_T \neq 0$ ist im Standardmodell bei $T = T_{EW} \sim 100 \text{ GeV}$.

In der gebrochenen Phase ($T < T_{EW}$) ist die Übergangsrate pro Volumen V :

$$\frac{\Gamma_{\cancel{B+L}}^{sph}}{V} = \left(\frac{M_W}{\alpha_2 T}\right)^3 M_W^4 \underbrace{\exp\left(-\frac{E_{sph}(T)}{T}\right)}_{\text{Boltzmann-Faktor}} \quad (697)$$

Für $T > T_{EW}$ ist

$$\frac{\Gamma_{\cancel{B+L}}^{sph}}{V} \simeq 21 \alpha_2^5 T^4 \quad (698)$$

Sacharow-Bedingung 2) und 3): Die Noether-Ladungen zu $\text{U}(1)_B$ in (694) ist

$$B = \frac{1}{3} \sum_q \int d^3 \vec{x} q^\dagger(x) q(x) \quad (699)$$

Transformation unter P, C

$$PBP^{-1} = +B \quad (700a)$$

$$CBC^{-1} = -B \quad (700b)$$

$$\Rightarrow (CP)B(CP)^{-1} = -B \quad (700c)$$

Wäre C oder P erhalten, dann wäre der Erwartungswert $\langle B \rangle = -\langle B \rangle \Rightarrow \langle B \rangle = 0$ auch

$$(CPT)B(CPT)^{-1} = -B \quad (701)$$

Sacharow-Bedingung 4): Im thermischen Gleichgewicht wird ein physikalisches System (hier: Universum) durch einen Dichteoperator $\rho = \exp(-H/T)$ beschrieben.

Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \langle B(t) \rangle_T &= \text{tr}(\rho B(t)) = \text{tr}(\exp(-H/T) B(t)) = \text{tr}(\exp(-H/T) \exp(iHt) B(0) \exp(-iHt)) \\ &= \text{tr}(\underbrace{\exp(-iHt) \exp(-H/T) \exp(iHt)}_{\text{vertauscht}} B(0)) = \text{tr}(\rho B(0)) = \langle B(0) \rangle_T \end{aligned} \quad (702)$$

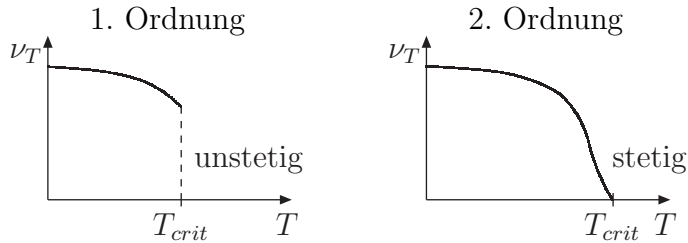
Andererseits:

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_T &= \text{tr}(\rho B) = \text{tr}(\exp(-H/T) B) = \text{tr}((CPT)^{-1} (CPT) \exp(-H/T) B) \\ &= \text{tr}(\exp(-H/T) (CPT) B (CPT)^{-1}) \stackrel{(701)}{=} -\text{tr}(\exp(-H/T) B) = -\langle B \rangle_T \end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle B \rangle_T = 0$ im thermischen Gleichgewicht

Mögliche Nichtgleichgewichtsprozesse:

1. Elektroschwache Phasenübergang, sofern es Phasenübergänge 1. Ordnung und hinreichend stark ist. (Ordnungsparameter hier ν_T)



$\Rightarrow$ **Elektroschwache Baryogenese**

2. Langsame Reaktionsrate Γ_A für Teilchenzerfall $A \rightarrow X$:
Die Hubble-Konstante H bestimmt die Expansionsrate des Universums:

$$\begin{aligned} \Gamma_A &\gtrsim H \Rightarrow \text{thermisches Gleichgewicht zwischen } A \rightarrow X \text{ und } X \rightarrow A \\ \Gamma_A &< H \Rightarrow \text{Ungleichgewicht, Teilchen } A \text{ fallen aus dem thermischen} \\ &\quad \text{Gleichgewicht mit den anderen Teilchen } X \end{aligned}$$

Im Standardmodell könnte nur Mechanismus 1 funktionieren. Für moderat schwere Higgs ist das Higgs-Potential ($\varphi = \text{Re } \Phi^0 = v_T + h/\sqrt{2}$)

$$V_{eff}(\varphi, T) = \frac{a}{2} (T^2 - T_1^2) \varphi^2 - \frac{b}{3} T \varphi^3 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \quad (703)$$

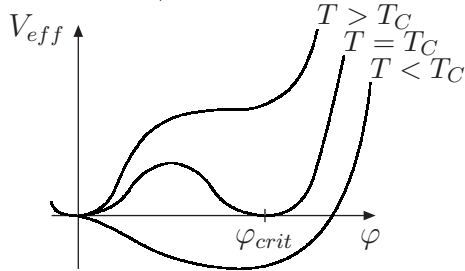
$$\text{mit } a = \frac{3}{16} g_2^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{m_t^2}{m_h^2} \right) \lambda, \quad b = 9 \frac{g_2^3}{32\pi}, \quad T_1 = \frac{m_h}{2\sqrt{a}} \quad (704)$$

kritische Temperatur:

$$T_c := \frac{T_1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a\lambda}}} > T_1$$

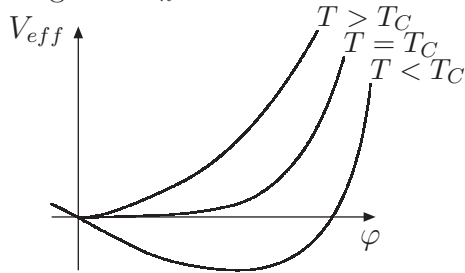
Für $T < T_c$ entwickelt (703) ein Minimum mit $v_T \neq 0$.

Für kleine λ , also kleine m_h :



1. Ordnung

Für große m_h :



keine Barriere, 2. Ordnung

Der Phasenübergang 1. Ordnung muss so beschaffen sein, dass die Sphaleronrate in (697) bei T_c weitgehend abgeschaltet ist, also

$$\frac{v_{T_c}}{T_c} \gtrsim 1 \quad (705)$$

Aus der Minimierung von (703) findet man

$$\frac{v_{T_c}}{T_c} = \frac{2b}{3\lambda} \stackrel{(696)}{\propto} \frac{v_{T=0}^2}{m_h^2} \quad (706)$$

Ist (705) erfüllt, so nennt man den Phasenübergang **stark**

$m_h \leq 40 \text{ GeV}$	1. Ordnung, stark
$40 \text{ GeV} \leq m_h \leq 73 \text{ GeV}$	1. Ordnung, schwach
$m_h \geq 73 \text{ GeV}$	2. Ordnung

Die Grenze $M_h > 114 \text{ GeV}$ des LEP-Experiments (für die Formel (703) nicht mehr gilt) ist also inkompatibel mit Baryogenese im Standardmodell

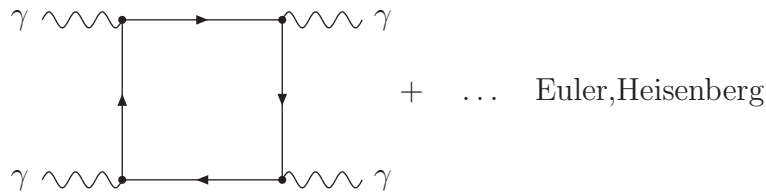
$\Rightarrow$ *Neue Physik* (siehe [4])

6.5 Schleifen / Loops

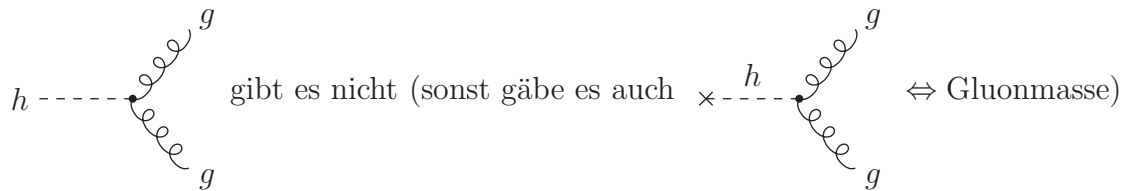
Ein Prozess, der auf Baumgraphenniveau verboten ist, heißt **schleifeninduziert**.

Beispiele:

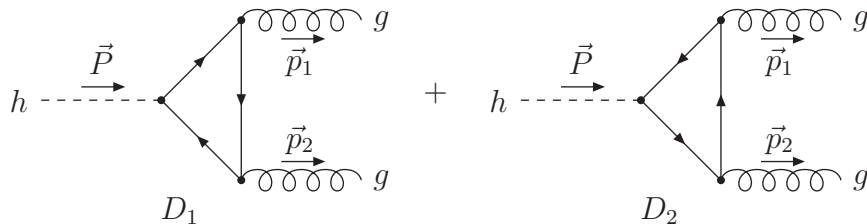
1. Photon-Photon-Streuung in der QED



2. Higgs-Zerfall in 2 Gluonen im Standardmodell

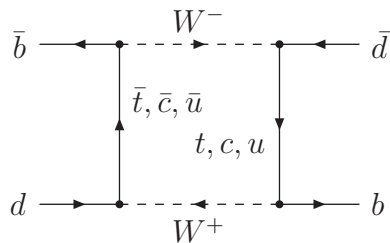


Führende Ordnung:



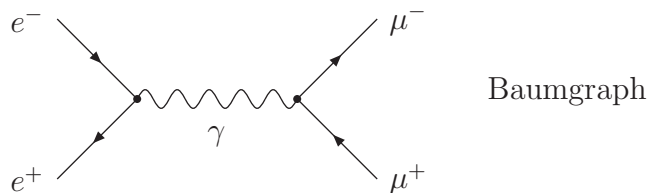
Es ist also $D_2(p_1, p_2) = D_1(p_2, p_1)$

3. $B - \bar{B}$ Mischung

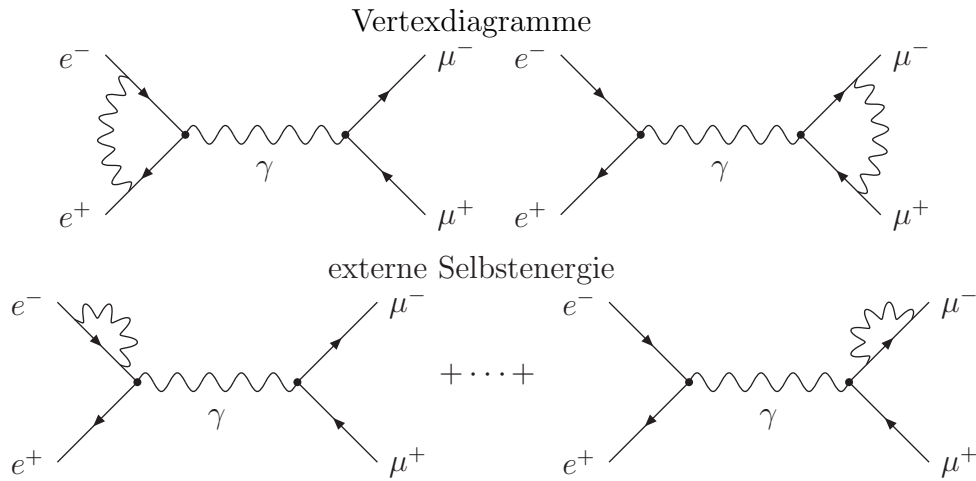


Korrekturen höherer Ordnung in der Kopplungskonstanten heißen **Schleifenkorrekturen** und werden immer durch Schleifendiagramme beschrieben.

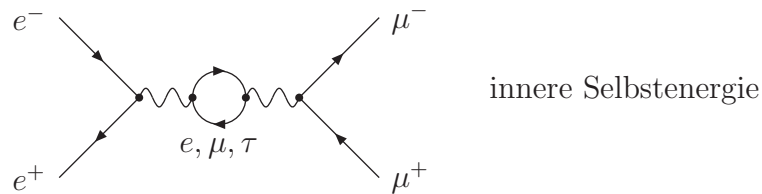
6.5.1 Beispiel: QED-Korrekturen zur μ - Paarproduktion in e^+e^- - Kollisionen



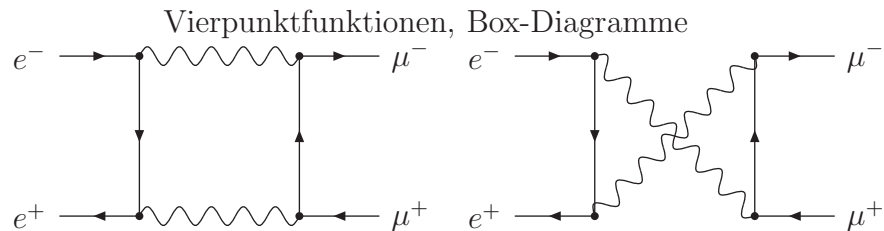
(Baumgraph = Bornsche Näherung)

Einschleifen-Korrekturen:**Vertexkorrekturen:**

(externe Selbstenergie (4 Diagramme) = Wellenfunktionsrenormierung, Fermion-Selbstenergie)

Weitere Korrekturen:

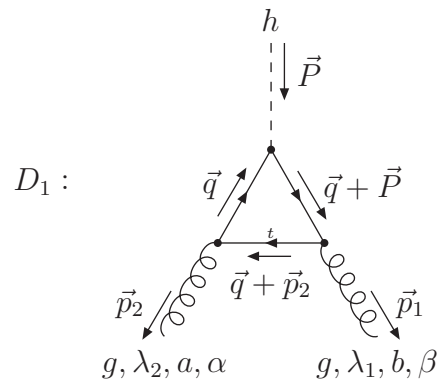
(innere Selbstenergie = Photon-Propagator-Diagramm, Photon-Selbstenergie)



Im Kapitel 5.1 hatten wir gezeigt:

Zu jeder Schleife gehört ein Schleifenimpuls, über den Integriert wird.

$h \rightarrow gg$:



$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad y_t = \frac{m_t}{v} = g_2 \frac{m_t}{M_W}$$

Für die Schleife ist nur das Top-Quark relevant.

$$D_1 = - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr} [-i(m_t + \not{q}) iT^a g_s \gamma^\alpha (-i)(m_t + \not{q} + \not{p}'_2)]}{(m_t^2 - q^2 - i\delta)(m_t^2 - (q + p_2)^2 - i\delta)} \cdot \frac{ig_s \gamma^\beta T^b (-i)(m_t + \not{q} + \not{P}) i y_t}{(m_t^2 - (q + P)^2 - i\delta)} \epsilon_{\alpha,a}^{(\lambda_2)*}(p_2) \epsilon_{\beta,b}^{(\lambda_1)*}(p_1) \quad (707)$$

Farbfaktor $\text{tr} T^a T^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}$

Nur Terme mit gerader Anzahl von Dirac-Matrizen tragen bei:

$$D_1 = -\frac{1}{2} \delta^{ab} \epsilon_{\alpha,a}^{(\lambda_2)*}(p_2) \epsilon_{\beta,b}^{(\lambda_1)*}(p_1) y_t g_s^2 \cdot \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(m_t^2 - q^2 - i\delta)(m_t^2 - (q + p_2)^2 - i\delta)(m_t^2 - (q + P)^2 - i\delta)} \cdot \{ m_t \text{tr} [\not{q} \gamma^\alpha (\not{q} + \not{p}'_2) \gamma^\beta] + m_t \text{tr} [\not{q} \gamma^\alpha \gamma^\beta (\not{q} + \not{P})] + m_t \text{tr} [\gamma^\alpha (\not{q} + \not{p}'_2) \gamma^\beta (\not{q} + \not{P})] + m_t^3 \text{tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta] \} \quad (708)$$

Wir schreiben $\not{q} = q^\mu \gamma_\mu$, $\not{q} + \not{p}'_2 = (q^\nu + p_2^\nu) \gamma_\nu$ usw. (708) wird dann zu:

$$D_1 = -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha,a}^{(\lambda_2)*}(p_2) \epsilon_{\beta,a}^{(\lambda_1)*}(p_1) y_t g_s^2 m_t \cdot \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(m_t^2 - q^2 - i\delta)(m_t^2 - (q + p_2)^2 - i\delta)(m_t^2 - (q + P)^2 - i\delta)} \cdot \{ \text{tr} [\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta] q^\mu (q^\nu + p_2^\nu) + \text{tr} [\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\nu] q^\mu (q^\nu + P^\nu) + \text{tr} [\gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma^\beta \gamma_\nu] (q^\mu + p_2^\mu) (q^\nu + P^\nu) + m_t^2 \text{tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta] \} \quad (709)$$

In (709) treten 3 verschiedene Schleifenintegrale auf:

- das **skalare** Integral

$$I(p_2, P) := \int \frac{d^4 q}{i\pi^2} \frac{1}{(q^2 - m_t^2 + i\delta)((q + p_2)^2 - m_t^2 + i\delta)((q + P)^2 - m_t^2 + i\delta)} \quad (710)$$

- das **Vektorintegral**

$$I^\mu(p_2, P) := \int \frac{d^4 q}{i\pi^2} \frac{q^\mu}{(q^2 - m_t^2 + i\delta)((q + p_2)^2 - m_t^2 + i\delta)((q + P)^2 - m_t^2 + i\delta)} \quad (711)$$

- und das **Tensorintegral** (2. Stufe)

$$I^{\mu\nu}(p_2, P) := \int \frac{d^D q}{i\pi^{D/2}} \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - m_t^2 + i\delta)((q + p_2)^2 - m_t^2 + i\delta)((q + P)^2 - m_t^2 + i\delta)} \quad (712)$$

$I^{\mu\nu}(p_2, P)$ ist ultraviolett-divergent.

Die UV-Divergenz ist in (712) **regularisiert** mit der Methode der **dimensionalen Regularisierung**:

Man betrachtet zunächst $D \in \mathbb{N}$ und (hier) $D \geq 2$: p_2 und P in (712) spannen einen maximal 2-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^D$ auf.

Unter Ausnutzung der Lorentz-Kovarianz ist für $p_2^2 \geq 0, P^2 > 0$ o.B.d.A.:

$$\begin{aligned}
 P^\rho &= \begin{pmatrix} P^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2^\rho = \begin{pmatrix} p_2^0 \\ p_2^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow d^D q &= dq^0 dq^1 \underbrace{q_r^{D-3} dq_r d\Omega}_{\substack{\text{Polarkoordinaten} \\ \text{im Orthogonalraum} \\ \text{zu } p_2^\rho \text{ und } P^\rho}}
 \end{aligned} \tag{713}$$

Mit (713) kann in (712) über $dq_r d\Omega$ integriert werden.

Für ganzzahliges D' ist ($D' = D - 2$ im Beispiel):

$$\int d\Omega_{D'} = \Omega_{D'} = \frac{2\pi^{\frac{D'}{2}}}{\Gamma(\frac{D'}{2})} \tag{714}$$

$\int d\Omega_{D'}$: Raumwinkelement in D' Dimensionen

mit der bekannten Eulersche Gammafunktion $\Gamma(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Für } D' = 1 : \Omega_1 &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 2 \\
 D' = 2 : \Omega_2 &= \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 D' = 3 : \Omega_3 &= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = 4\pi = \int_{-1}^1 d \cos \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 D' = 4 : \Omega_4 &= \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2
 \end{aligned}$$

Dimensionale Regularisierung: $D' \in \mathbb{C}$ beliebig, (714) ist Definition

Erinnerung:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt \tag{715}$$

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(z+n) = (z)^{(n)} \Gamma(z) \tag{716}$$

mit dem Pochhammer-Symbol $(z)^{(n)} = z(z+1) \cdots (z+n-1)$

$$\text{z.B. aus } (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n (-\alpha)^{(n)}}{n!}$$

Die Gammafunktion hat einfache Pole für $z = 0, -1, \dots$ wie man am Ergänzungssatz der Gammafunktion

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (717)$$

erkennen kann.

$$\Gamma(1+z) = 1 - \gamma z + \left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\pi^2}{12} \right) z^2 + O(z^3) \quad (718)$$

mit der Euler-Mascheroni-Konstanten

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right] \approx 0,5772156649 \quad (719)$$

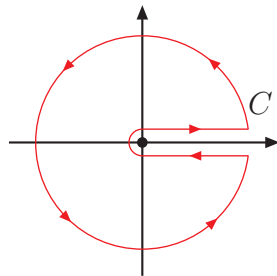
(es ist unbekannt, ob γ rational, irrational, algebraisch oder transzendent ist). Setzt man (713) in Tensorintegrale wie (712) ein, so trifft man weiter auf

$$I[f] = \int_0^\infty q_r^{D'-1} f(q_r^2) dq_r \stackrel{x=q_r^2}{=} \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\frac{D'}{2}-1} f(x) dx \quad (720)$$

Ist (wie in unserem Fall) f eine rationale Funktion, so kann I berechnet werden.

$$\begin{aligned} x^{\frac{D'}{2}-1} &= [(-x \pm i\delta) \exp(\mp i\pi)]^{\frac{D'}{2}-1} = (-x \pm i\delta)^{\frac{D'}{2}-1} \exp(\mp i\pi(D'/2 - 1)) \\ I[f] &= \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\frac{D'}{2}-1} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty (-x \pm i\delta)^{\frac{D'}{2}-1} \exp(\mp i\pi(D'/2 - 1)) f(x) dx \end{aligned}$$

Betrachte das Konturintegral:



Konvergiert (720), so verschwindet der Beitrag des Kreises und

$$\begin{aligned} \int_C x^{\frac{D'}{2}-1} f(x) dx &= \int_0^\infty (-x - i\delta)^{\frac{D'}{2}-1} f(x) dx + \int_\infty^0 (-x + i\delta)^{\frac{D'}{2}-1} f(x) dx \\ &= 2(\exp(-i\pi(D'/2 - 1)) - \exp(i\pi(D'/2 - 1))) I[f] \\ &= -4i \sin(\pi(D'/2 - 1)) I[f] \end{aligned}$$

Für $D'/2 \notin \mathbb{Z}$ impliziert dies

$$\begin{aligned} I[f] &= \frac{i}{4 \sin(\pi(D'/2 - 1))} \underbrace{\int_C x^{\frac{D'}{2}-1} f(x) dx}_{\text{Residuensatz}} \\ &= -\frac{\pi}{2 \sin(\pi(\frac{D'}{2} - 1))} \sum_{x_k \in \text{Pol}(f)} \text{Res}\left(f(x_k)(-x_k)^{\frac{D'}{2}-1}\right) \end{aligned} \quad (721)$$

Ein häufig vorkommender Spezialfall von (720) ist $f(x) = (x + m^2)^{-a}$, dann ist

$$\begin{aligned} I[f] &= \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\frac{D'}{2}-1} (x + m^2)^{-a} dx \stackrel{x=m^2 y}{=} \frac{1}{2} (m^2)^{\frac{D'}{2}-a} \int_0^\infty y^{\frac{D'}{2}-1} (y + 1)^{-a} dy \\ &= \frac{1}{2} (m^2)^{\frac{D'}{2}-a} \underbrace{B\left(\frac{D'}{2}, a - \frac{D'}{2}\right)}_{\text{Eulersche Beta-Funktion}} = \frac{1}{2} (m^2)^{\frac{D'}{2}-a} \frac{\Gamma\left(\frac{D'}{2}\right) \Gamma\left(a - \frac{D'}{2}\right)}{\Gamma(a)} \end{aligned} \quad (722)$$

((722) definiert $I[f]$ für $-a, -\frac{D'}{2}, \frac{D'}{2} - a \notin \mathbb{N}_0$). Speziell für $a = n \in \mathbb{N}$:

$$I[f] = \frac{1}{2} (m^2)^{\frac{D'}{2}-n} \frac{\Gamma\left(\frac{D'}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{D'}{2}\right)}{(n-1)!} \quad (723)$$

Mit (714)

$$\Omega_{D'} I[f] = (m^2)^{\frac{D'}{2}-n} \pi^{\frac{D'}{2}} \frac{\Gamma\left(n - \frac{D'}{2}\right)}{(n-1)!} \quad (724)$$

Definiere:

$$D = 4 - 2\varepsilon \quad (725)$$

Die UV-Divergenzen erscheinen dann als Pole in ε :

Ist $a - D'/2$ in (722) negativ ganzzahlig oder Null für $\varepsilon = 0$, also

$$a - \frac{D'}{2} = -p + t\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

mit $p \in \mathbb{N}_0$, so ist wegen (716):

$$\Gamma\left(a - \frac{D'}{2}\right) = \Gamma(-p + t\varepsilon + O(\varepsilon^2)) = \frac{\Gamma(1 + t\varepsilon + O(\varepsilon^2))}{(-p + t\varepsilon + O(\varepsilon^2))^{(p+1)}}$$

Nenner enthält Faktor $t\varepsilon + O(\varepsilon^2) \Rightarrow$ einfacher Pol.

Ein n -Schleifen-Integral hat UV-Pole bis zur Ordnung n .

Entwicklungen von $\Gamma(n - D'/2)$ in (724) (mit (716),(718)):

„log-Divergenz“: $n - \frac{D'}{2} = \varepsilon$:

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1 - \gamma\varepsilon}{\varepsilon} + O(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon) \quad (726)$$

„lineare-Divergenz“: $n - \frac{D'}{2} = -1 + \varepsilon$:

$$\Gamma(-1 + \varepsilon) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{-1 + \varepsilon} \stackrel{(726)}{=} -(1 + \varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) + O(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \gamma + O(\varepsilon) \quad (727)$$

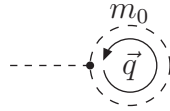
„quadratische-Divergenz“: $n - \frac{D'}{2} = -2 + \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \Gamma(-2 + \varepsilon) &= \frac{\Gamma(-1 + \varepsilon)}{-2 + \varepsilon} = \Gamma(-1 + \varepsilon) \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \right) \\ &\stackrel{(727)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma \right) \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon \right) + O(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{3}{4} - \frac{\gamma}{2} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (728)$$

6.5.2 Algorithmische Berechnung der Ein-Schleifen-Integrale

Definitionen:

Einpunktfunktionen

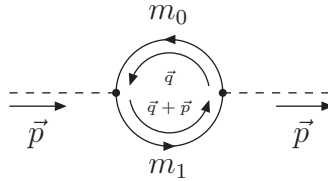


$$A_0(m_0) = \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{q^2 - m_0^2} \quad (\text{skalares Integral}) \quad (729)$$

$$A^{\mu\nu}(m_0) = \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 - m_0^2} =: g^{\mu\nu} A_{00}(m_0) \quad (730)$$

usw. Einfeld-Integrale mit ungerader Anzahl von Schleifenimpulsen im Zähler verschwinden.

Zweipunktfunktionen



$$B_0(p; m_0, m_1) \equiv B_0(p^2; m_0, m_1) := \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{(q^2 - m_0^2)((q + p)^2 - m_1^2)} \quad (731)$$

$$B^\mu(p; m_0, m_1) := \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{q^\mu}{(q^2 - m_0^2)((q + p)^2 - m_1^2)} =: p^\mu B_1(p^2; m_0, m_1) \quad (732)$$

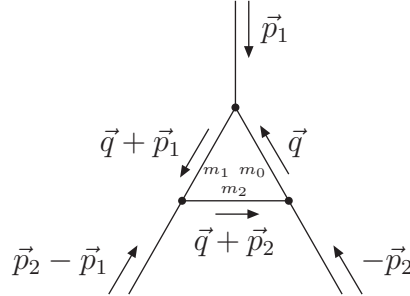
$$\begin{aligned} B^{\mu\nu}(p; m_0, m_1) &:= \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - m_0^2)((q + p)^2 - m_1^2)} \\ &=: g^{\mu\nu} B_{00}(p^2; m_0, m_1) + p^\mu p^\nu B_{11}(p^2; m_0, m_1) \end{aligned} \quad (733)$$

$$\begin{aligned} B^{\mu\nu\rho}(p; m_0, m_1) &:= \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{(q^2 - m_0^2)((q + p)^2 - m_1^2)} \\ &=: g^{\{\mu\nu} p^{\rho\}} B_{001}(p^2; m_0, m_1) + p^\mu p^\nu p^\rho B_{111}(p^2; m_0, m_1) \end{aligned} \quad (734)$$

$$\text{mit } g^{\{\mu\nu} p^{\rho\}} = \{gp\}^{\mu\nu\rho} := g^{\mu\nu} p^\rho + g^{\mu\rho} p^\nu + g^{\nu\rho} p^\mu \quad (735)$$

Achtung: Oft wird eine andere Normierung verwendet!

Dreipunktfunktionen Für $H \rightarrow gg$ brauchen wir:



$$C_0(p_1, p_2; m_0, m_1, m_2) \equiv C_0(p_1^2, p_2^2, (p_2 - p_1)^2; m_0, m_1, m_2) \\ := \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{(q^2 - m_0^2) ((q + p_1)^2 - m_1^2) ((q + p_2)^2 - m_2^2)} \quad (736)$$

$$C^\mu(p_1, p_2; m_0, m_1, m_2) := \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{q^\mu}{(q^2 - m_0^2) ((q + p_1)^2 - m_1^2) ((q + p_2)^2 - m_2^2)} \\ =: p_1^\mu C_1(p_1^2, p_2^2, (p_2 - p_1)^2; m_0, m_1, m_2) + p_2^\mu C_2(\dots) \quad (737)$$

$$C^{\mu\nu}(p_1, p_2; m_0, m_1, m_2) := \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - m_0^2) ((q + p_1)^2 - m_1^2) ((q + p_2)^2 - m_2^2)} \\ =: g^{\mu\nu} C_{00}(\dots) + p_1^\mu p_1^\nu C_{11}(\dots) + p_1^{\{\mu} p_2^{\nu\}} C_{12}(\dots) + p_2^\mu p_2^\nu C_{22}(\dots) \quad (738) \\ \text{mit } p_1^{\{\mu} p_2^{\nu\}} = \{p_1 p_2\}^{\mu\nu} = p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu \quad (739)$$

C_0 : UV-endlich $D \rightarrow 4$, Symmetrisch unter beliebiger Vertauschung von (m_1, p_2^2) , (m_2, p_1^2) und $(m_0, (p_2 - p_1)^2)$ - entspricht Drehung des Diagramms um 120° oder Spiegelung.

C^μ : UV-endlich

$C^{\mu\nu}$: Symmetrisch bezüglich $1 \leftrightarrow 2$

Vierpunktfunktionen Vierpunktfunktionen werden mit $D_0, D^\mu, D^{\mu\nu}$, usw. bezeichnet. Man braucht nur A_0, B_0, C_0, D_0 auszurechnen, alle anderen Schleifenintegrale kann man algebraisch durch diese vier Funktionen ausdrücken (Passarino-Veltman-Methode, Brown, Feynman)

Beispiel:

Kontraktion von (737) mit $p_{1\mu}$ oder $p_{2\mu}$:

$$p_{1\mu} : p_1^2 C_1 + p_1 p_2 C_2 = p_{1\mu} C^\mu = \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{p_1 q}{(q^2 - m_0^2) ((q + p_1)^2 - m_1^2) ((q + p_2)^2 - m_2^2)}$$

Mit

$$p_1 q = \frac{1}{2} (-[q^2 - m_0^2] + [(q + p_1)^2 - m_1^2] + m_1^2 - m_0^2 - p_1^2)$$

wird daraus:

$$\begin{aligned}
 p_1^2 C_1 + p_1 p_2 C_2 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \left[\frac{1}{(q^2 - m_0^2) ((q + p_2)^2 - m_2^2)} - \frac{1}{((q + p_1)^2 - m_1^2) ((q + p_2)^2 - m_2^2)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m_1^2 - m_0^2 - p_1^2}{(q^2 - m_0^2) ((q + p_1)^2 - m_1^2) ((q + p_2)^2 - m_2^2)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} B_0(p_2^2; m_0, m_2) - \frac{1}{2} B_0((p_2 - p_1)^2; m_1, m_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (m_1^2 - m_0^2 - p_1^2) C_0(p_1^2, p_2^2, (p_2 - p_1)^2; m_0, m_1, m_2) = X_{12}
 \end{aligned} \tag{740}$$

Im zweiten Term wurde $q' = q + p_1$ substituiert. Kontraktion mit $p_{2\mu}$ liefert:

$$\begin{aligned}
 p_1 p_2 C_1 + p_2^2 C_2 &= \frac{1}{2} B_0(p_1^2; m_0, m_1) - \frac{1}{2} B_0((p_2 - p_1)^2; m_1, m_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (m_2^2 - m_0^2 - p_2^2) C_0(p_1^2, p_2^2, (p_2 - p_1)^2; m_0, m_1, m_2) = X_{21}
 \end{aligned} \tag{741}$$

(740) und (741) kombinieren sich zu

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{21} \end{pmatrix}, \text{ also} \\
 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{p_1^2 p_2^2 - (p_1 p_2)^2} \begin{pmatrix} p_2^2 & -p_1 p_2 \\ -p_1 p_2 & p_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{21} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{742}$$

D.h. C^μ ist rekursiv auf B_0 und C_0 zurückgeführt. Wenn die **Gram-Determinante**

$$p_1^2 p_2^2 - (p_1 p_2)^2 = \det \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_2^2 \end{pmatrix}$$

verschwindet, bricht der Algorithmus zusammen. In diesem Fall kann man jedoch (einfachere) Rekursionsformeln finden, indem man Tensorintegrale mit einem Index mehr (hier $C^{\mu\nu}$) betrachtet und mit $p_{1\mu}, p_{2\mu}$ kontrahiert.

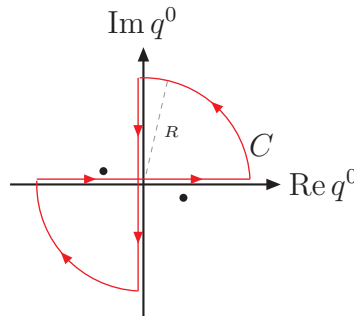
(Literatur: [5, Kapitel 2.3.2.3])

Berechnung der Grundintegrale ('t Hooft, Veltmann):

$A_0^{(r)}$ -**Funktion:** Verallgemeinerung von (729):

$$A_0^{(r)}(m_0) = \int \frac{d^D q}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{(q^2 - m_0^2 + i\delta)^r}, \quad r \geq 1 \tag{743}$$

Betrachtet die komplexe q^0 -Ebene:



Pole bei $(q^0)^2 = \vec{q}^2 + m_0^2 - i\delta \Rightarrow q^0 = \pm\sqrt{\vec{q}^2 + m_0^2} \mp i\delta$. Das Integral über C verschwindet wegen des Residuensatzes. Integrale über die Viertelkreise verschwinden für $R \rightarrow \infty$, sofern $A_0^{(r)}$ UV-konvergent ist, also $D - 2r < 0$

$\Rightarrow$ Wick-Rotation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq^0 = \int_{-i\infty}^{i\infty} dq^0 \stackrel{q^0=iq^4}{=} i \int_{-\infty}^{\infty} dq^4 \quad (744)$$

$$\Rightarrow A_0^{(r)}(m_0) = \int \frac{d^{D-1}\vec{q}}{i\pi^{D/2}} \int dq^0 \frac{1}{(q^2 - m_0^2 + i\delta)^r} \stackrel{(744)}{=} \int \frac{d^D q_E}{\pi^{D/2}} \frac{1}{(-q_E^2 - m_0^2 + i\delta)^r} \quad (745)$$

mit dem **euklidischen Impuls**

$$q_E = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^4 \end{pmatrix} \text{ und } q_E^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$$

(745) wird zu

$$A_0^{(r)}(m_0) = \int \frac{d^D q_E}{\pi^{D/2}} (-1 - i\delta)^r \frac{1}{(q_E^2 + m_0^2)^r} \quad (746)$$

Im Faktor $(-1 + i\delta)^r$ ist das $i\delta$ nur für $r \notin \mathbb{Z}$ relevant:

$$(-1 - i\delta)^r = \exp(\underbrace{r \ln(-1 - i\delta)}_{-i\pi}) = \exp(-i\pi r)$$

Polarkoordinaten in (746) ergeben

$$A_0^{(r)}(m_0) = \exp(-i\pi r) \int_0^\infty d|q| \frac{|q|^{D-1}}{(|q|^2 + m_0^2)^r} \int d\Omega_D \frac{1}{\pi^{D/2}} \stackrel{(714)(722)}{=} \exp(-i\pi r) m_0^{D-2r} \frac{\Gamma(r - \frac{D}{2})}{\Gamma(r)} \quad (747)$$

B_0 -Funktion: Mit dem Feynman-Parameter x kann man Integrale umschreiben:

$$\frac{1}{D_1} \cdot \frac{1}{D_2} = \int_0^1 \frac{dx}{((1-x)D_1 + xD_2)^2} \quad (748)$$

Auf B_0 angewandt ergibt sich:

$$\begin{aligned} B_0(p^2; m_0, m_1) &\stackrel{(731)}{=} \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{(q^2 - m_0^2)((q+p)^2 - m_1^2)} \\ &= \int \frac{d^D q}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx \frac{1}{(q^2 + 2xqp + x(p^2 - m_1^2) - m_0^2(1-x))^2} \end{aligned}$$

Substituiere: $q' = q + xp$

$$= \int_0^1 dx \int \frac{d^D q'}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{(q'^2 - A(x) + i\delta)^2}$$

mit $A(x) = -p^2 x(1-x) + xm_1^2 + m_0^2(1-x) - i\delta$

und (747) liefert mit $r = 2$

$$\begin{aligned}
 B_0(p^2; m_0, m_1) &\stackrel{(747)}{=} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \int_0^1 dx (A(x))^{\frac{D}{2}-2} \\
 &= \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx (-p^2 x(1-x) + x m_1^2 + m_0^2(1-x) - i\delta)^{-\varepsilon} \quad (749)
 \end{aligned}$$

Entwicklung in ε :

$$\begin{aligned}
 B_0(p^2; m_0, m_1) &\stackrel{(726)}{=} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) \int_0^1 dx (1 - \varepsilon \ln(-p^2 x(1-x) + x m_1^2 + m_0^2(1-x) - i\delta)) \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \int_0^1 dx \ln(-p^2 x(1-x) + m_1^2 x + m_0^2(1-x) - i\delta) \quad (750)
 \end{aligned}$$

Nullstellenzerlegung des Integranden:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= -p^2 x(1-x) + m_1^2 x + m_0^2(1-x) - i\delta =: p^2(x-x_1)(x-x_2) \\
 \int_0^1 dx \ln(A(x)) &= \int_0^1 dx [\ln(p^2 - i\delta) + \ln((x-x_1)(x-x_2))] \quad (751)
 \end{aligned}$$

Erklärung zum „ $i\delta$ “: Sei $a, b \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Im} \ln(ab - i\delta) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \cdot b > 0 \\ -\pi & \text{für } a \cdot b < 0 \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\ln(ab - i\delta) \simeq \ln(a - i\delta) + \ln\left(b - \frac{i\delta}{a}\right) \quad \text{für } \delta \rightarrow 0$$

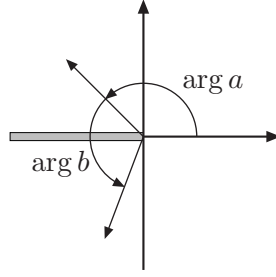
Imaginärteile:

	$\operatorname{Im} \ln(ab - i\delta)$		$\operatorname{Im} \ln(a - i\delta)$		$\operatorname{Im} \ln\left(b - \frac{i\delta}{a}\right)$
$a, b > 0$	0	=	0	+	0
$a > 0, b < 0$	$-\pi$	=	0	+	$(-\pi)$
$a < 0, b > 0$	$-\pi$	=	$-\pi$	+	0
$a, b < 0$	0	=	$-\pi$	+	π

Für $a, b \notin \mathbb{R}$ gilt allgemein

$$\ln|ab| + i \arg(ab) = \ln(ab) =: \ln a + \ln b + \eta(a, b) = \ln|a| + \ln|b| + i \arg a + i \arg b + \eta(a, b) \quad (752)$$

$$\text{mit } \eta(a, b) = 2\pi i (\Theta(-\operatorname{Im} a)\Theta(-\operatorname{Im} b)\Theta(\operatorname{Im}(ab)) - \Theta(\operatorname{Im} a)\Theta(\operatorname{Im} b)\Theta(-\operatorname{Im}(ab))) \quad (753)$$



Wegen

$$x_1 + x_2 = \frac{p^2 + m_0^2 - m_1^2}{p^2} \in \mathbb{R}$$

ist $\text{Im } x_1 \cdot \text{Im } x_2 < 0$, also ist mit (752):

$$\ln((x - x_1)(x - x_2)) = \ln((x_1 - x)(x_2 - x)) = \ln(x_1 - x) + \ln(x_2 - x)$$

und (750) wird zu:

$$B_0(\dots) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma - [x_1 + x_2 - 2x - (x_1 - x) \ln(x_1 - x) - (x_2 - x) \ln(x_2 - x) + x \ln(p^2 - i\delta)]_0^1$$

Die Lösung kann man kompakt durch die Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= r^2 + \frac{p^2 - m_0^2 - m_1^2 + i\delta}{m_0 m_1} r + 1 = (r - r_1)(r - r_2) \\ r_{1,2} &= \frac{-p^2 + m_0^2 + m_1^2 - i\delta \pm \sqrt{(p^2 - m_0^2 - m_1^2 + i\delta)^2 - 4m_0^2 m_1^2}}{2m_0 m_1} = \frac{1}{r_{2,1}} \end{aligned}$$

ausdrücken:

$$B_0(p^2; m_0, m_1) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + 2 - \ln(m_0 m_1) + \frac{m_0^2 - m_1^2}{p^2} \ln \frac{m_1}{m_0} - \frac{m_0 m_1}{p^2} \left(\frac{1}{r} - r \right) \ln r \quad (754)$$

Die C_0 -Funktion erfordert die Integration über zwei Feynman-Parameter. Das Ergebnis enthält 12 **Dilogarithmen**

$$\begin{aligned} \text{Li}_2(z) &= - \int_0^1 dt \frac{\ln(1 - zt)}{t} = - \int_0^z dt \frac{\ln(1 - t)}{t} \\ &\quad \arg(1 - z) \neq \pm\pi \end{aligned} \quad (755)$$

Polylogarithmen:

$$\text{Li}_n(z) := \int_0^z dt \frac{\text{Li}_{n-1}(t)}{t} \quad (756)$$

$$\text{Li}_0(z) = \frac{z}{1 - z} \quad (757)$$

$$\Rightarrow \text{Li}_1(z) = \int_0^z dt \frac{1}{1 - t} = -\ln(1 - t) \quad (758)$$

Reihenentwicklung für $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}
 \text{Li}_0(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \\
 \Rightarrow \text{Li}_1(z) &\stackrel{(756)}{=} \int_0^z dt \frac{\text{Li}_0(t)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z dt t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \\
 \Rightarrow \text{Li}_k(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}
 \end{aligned} \tag{759}$$

Für C_0 siehe Literatur [6], [7]:

Zurück zu $h \rightarrow gg$:

Die Integrale (710)-(712) sind also

$$I(p_2, P) = C_0(p_2^2, P^2, p_1^2; m_t, m_t, m_t) \tag{760a}$$

$$I^\mu(p_2, P) = C^\mu(p_2^2, P^2, p_1^2; m_t, m_t, m_t) \tag{760b}$$

$$I^{\mu\nu}(p_2, P) = C^{\mu\nu}(p_2^2, P^2, p_1^2; m_t, m_t, m_t) \tag{760c}$$

Zur UV-Divergenz: Nur C_{00} ist UV-divergent, nicht C_{11} , C_{12} oder C_{22} . Power-counting funktioniert auch für die Koeffizienten

$$[C_{00}] = 0, [C_{ij}] = -2 \text{ für } i, j \neq 0$$

D-dimensionale Dirac-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} \tag{761}$$

$$\text{mit } g^\mu{}_\mu = D \tag{762}$$

$$\Rightarrow \gamma_\mu \gamma^\mu = \frac{1}{2} \{\gamma_\mu, \gamma^\mu\} = g^\mu{}_\mu = D$$

Kahane-Identitäten:

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu \stackrel{(761)}{=} 2g^\alpha{}_\mu \gamma^\mu - \gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma^\mu = (2 - D)\gamma^\alpha = (-2 + 2\varepsilon)\gamma^\alpha \tag{763}$$

Konvention:

$$\text{tr } \mathbf{1} = 4 \tag{764}$$

Spuren: (Die Spur ist auch in D -Dimensionen zyklisch.)

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \text{tr}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = g^{\mu\nu} \text{tr } \mathbf{1} \stackrel{(764)}{=} 4g^{\mu\nu} \tag{765}$$

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = Ag^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + Bg^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + Cg^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}$$

Kontraktion mit $g_{\alpha\beta}$, $g_{\beta\mu}$ und $g_{\alpha\mu}$:

$$A = C = \text{tr } \mathbf{1} = 4, \quad B = -\text{tr } \mathbf{1} = -4$$

Also

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = \text{tr} \mathbf{1} (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) = 4 (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) \quad (766)$$

Mit (764) sind Spuren in D Dimensionen gleich denen in 4 Dimensionen.

Fügen wir Dirac-Algebra und Schleifen-Integrale zusammen, so wird (709) zu

$$D_1 = -y_t g_s^2 2m_t \left[(\varepsilon_a^{(\lambda_1)} \cdot p)(\varepsilon_a^{(\lambda_2)} \cdot P)(C_0 + 4C_{12} + 4C_2 + 4C_{12}) \star F \star \right. \\ \left. + (\varepsilon_a^{(\lambda_1)} \cdot \varepsilon_a^{(\lambda_2)})(2\varepsilon C_{00} - m_h^2 C_{22} - Pp(C_0 + 2C_2 + 2C_{12}) + m_t^2) \right] \quad (767)$$

Die Argumente der Schleifenintegrale sind gleich (siehe (760)):

$$C_{00}(p_2^2, P^2, p_1^2; m_t, m_t, m_t)$$

D_2 erhält man aus D_1 via $p_1 \leftrightarrow p_2, \lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$

6.5.3 LSZ-Reduktionsformel

Die **Lehmann-Symanzik-Zimmermann**-Reduktionsformel verknüpft S -Matrix-Elemente mit Greenfunktionen.

In Kapitel 5 wurden Feynman-Regeln für S -Matrix-Elemente hergeleitet z.B. für ein reelles Klein-Gordon-Feld mit φ^4 -Kopplung. In (217) hatten wir für die n -Punkt-Greenfunktion gefunden:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = {}_I \langle 0 | \mathbf{T}[\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)] | 0 \rangle_I \\ = \frac{\langle 0 | \mathbf{T}[\varphi_I(x_1) \cdots \varphi_I(x_n)] \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}_I(\varphi(x)) \right) | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathbf{T} \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}_I(\varphi_I(x)) \right) | 0 \rangle} \quad (768)$$

$\varphi(x_i)$: Wechselwirkende Felder im Heisenbergbild

$\varphi_I(x_i)$: Wechselwirkende Felder im Wechselwirkungsbild (mit Fourierdarstellung wie freie Felder)

$|0\rangle$: Vakuum der freien Theorie

$|0\rangle_I$: Vakuum der Wechselwirkenden Theorie

Mit $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$ können wir aus (768) die Feynman-Regeln analog zu denen der S -Matrix-Elemente ableiten.

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k G^{(k)}(x_1, \dots, x_n) \quad (769)$$

Für $\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} \varphi_I^4(x)$ und $n = 4$ findet man mit

$$\exp(i \int d^4x \mathcal{L}_I) \simeq 1 - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \varphi_I^4(x)$$

zur Ordnung λ :

$$\begin{aligned}
 G_4^{(0)}(x_1, \dots, x_4) &= \langle 0 | \mathbf{T}[\varphi_I(x_1) \cdots \varphi_I(x_4)] | 0 \rangle \\
 &\quad x_1 \text{---} x_2 \\
 &= \quad \quad \quad + \text{Permutationen} \\
 &\quad x_3 \text{---} x_4 \\
 &\quad (3 \text{ verschiedene Wick-Kontraktionen}) \\
 \lambda G_4^{(1)}(x_1, \dots, x_4) &= \left(-i \frac{\lambda}{4!} \right) \int d^4x \langle 0 | \mathbf{T}[\varphi_I(x_1) \cdots \varphi_I(x_4)] \varphi_I^4(x) | 0 \rangle \\
 &\quad - \underbrace{G_4^{(0)}(x_1, \dots, x_4) \left(-i \frac{\lambda}{4!} \right) \int d^4x \langle 0 | \mathbf{T} \varphi_I^4(x) | 0 \rangle}_{\text{aus Nenner in (768)}} \\
 &= \quad \quad \quad + \text{Permutationen (770)} \\
 &\quad \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x \\ \diagup \quad \diagdown \\ x_3 \text{---} x_4 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \quad \quad \quad \circ \\ x_3 \text{---} x_4 \end{array}
 \end{aligned}$$

Der Nenner-Term in (768) führt dazu, dass sich Diagramme mit **Vakuum-Blasen** herausheben:

$$\begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \quad \quad \quad \circ \\ x_3 \text{---} x_4 \\ \text{aus Zähler} \end{array} - \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \quad \quad \quad \circ \\ x_3 \text{---} x_4 \\ \text{aus Nenner} \end{array} + \text{Permutationen} = 0$$

Zusätzliche Feynman-Regel:

$$\begin{array}{c} x_j \\ \text{---} \\ \vec{p}_j \end{array} \quad \int \frac{d^D p_j}{(2\pi)^D} \exp(ip_j x_j) \quad (771)$$

Damit unterscheiden sich die Feynmanregeln für S -Matrix-Elemente und Greenfunktionen in jeweils niedrigster Ordnung nur durch einen zusätzlichen Propagator pro externer Linie.

Beispiel im Impulsraum für $\tilde{G}_4(p_1, \dots, p_4)$:

Beitrag von

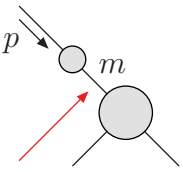
$$\begin{array}{c} p_1 \text{---} p_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ p_2 \text{---} p_4 \end{array} \quad \text{ist } (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{-i}{m^2 - p_1^2} \frac{-i}{m^2 - p_2^2} \frac{-i}{m^2 - p_3^2} \frac{-i}{m^2 - p_4^2} (i\lambda)$$

usw.

D.h. $i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \mathcal{M}$ ist $(-i)^4$ mal dem Residuum des Pols von $\tilde{G}_4$ bei $p_1^2 = \dots = p_4^2 = m^2$. Damit haben wir die LSZ-Formel *in niedrigster Ordnung* Störungstheorie gezeigt:

$$i\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{j=1}^n p_j\right) = (-i)^n \prod_{j=1}^n \lim_{p_j^2 \rightarrow m^2} (p_j^2 - \underbrace{m_j^2}_{\text{falls Massen verschieden}}) \tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n) \quad (772)$$

(p_j alle einlaufend). Auf Schleifenniveau treffen wir auf ein Problem:

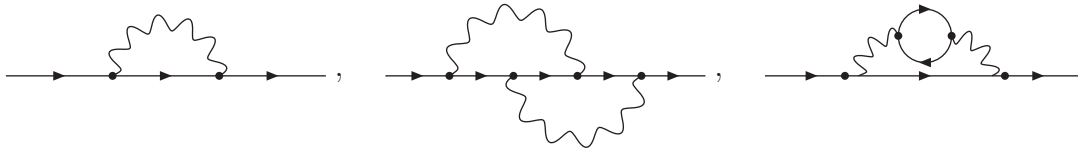


Propagator $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\delta} \xrightarrow{p^2 \rightarrow m^2} \frac{1}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty$

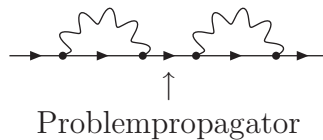
D.h. das Diagramm ist on-shell nicht definiert.

Selbstenergie: Diagramme, die beim Zerschneiden einer Linie in Teildigramme zerfallen, werden **1-Teilchen-reduzibel** (1PR) genannt.

Beispiel aus der QED:



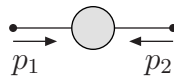
sind **1-Teilchen-irreduzibel** (1PI), aber



ist 1PR.

Zweipunktfunktion

$$\tilde{G}_2(p) =: (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2) \tilde{G}_2(p_1 + p_2)$$



Einsetzen in (773):

$$\tilde{G}_2(p) \stackrel{p^2 \rightarrow m_p^2}{\simeq} \frac{i}{(1 + \Sigma')(p^2 - m_p^2)} = \frac{iZ}{p^2 - m_p^2} \quad (777)$$

mit

$$Z = \frac{1}{1 + \Sigma'} \quad (778)$$

Das heißt, in der Nähe des Pols verhält sich $\frac{1}{Z}\tilde{G}_2(p)$ wie eine freie Green-Funktion. Vergleiche (777) mit (224), der Källén-Lehmann-Darstellung!

Z heißt **LSZ-Faktor** oder **Residuum des 1-Teilchen-Pols**.

n -Punkt Green-Funktion mit $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots \\ &\stackrel{(773)}{=} \tilde{G}_2(p) \cdot \text{Diagram 4} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

$$\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n) =: \tilde{G}_2(p_1) \cdots \tilde{G}_2(p_n) \cdot \tilde{G}_n^t(p_1, \dots, p_n) \quad (779)$$

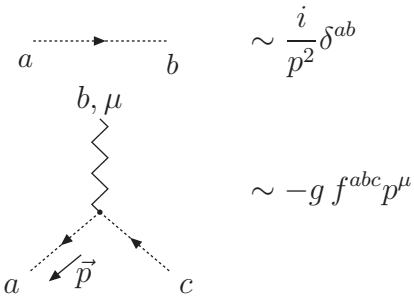
mit der **trunkierten Greenfunktion** $\tilde{G}_n^t$.

D.h. $\tilde{G}_n^t$ wird berechnet, indem man nur Feynman-Diagramme berechnet, die keine Selbstenergien in externen Beinen haben und dabei die Faktoren $i(p^2 - m^2)^{-1}$ für die externen Beine weglässt.

$\tilde{G}_n^{tc}$ bezeichnet die **zusammenhängende/connected Greenfunktion**, bei der nur zusammenhängende Feynmangraphen (also echte Streu- und Zerfallsprozesse) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_4^{tc(0)} &: \text{Diagram 1} \quad i\lambda \\ \lambda \tilde{G}_4^{tc(1)} &: \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Permutationen} \\ &\propto B_0((p_1 + p_2)^2, m^2, m^2) \end{aligned}$$

Feynman-Regeln:



Literatur

- [1] Sexl, Roman and Urbantke, Helmuth K.: *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer
- [2] Bargman, Wigner, Proceedings of the National Academy of Sciences, Volume 34, No. 5 (1946) p. 211
- [PDT] Journal of Physics G, *Nuclear and Particle Physics*, Volume 33, July 2006
- [3] K. Anikeev, et al *B Physics at the Tevatron: Run II and Beyond*, hep-ph/0201071
- [4] W. Bernreuther *CP violation and baryogenesis*, hep-ph/0205279
- [5] P. Becher, M. Böhm, und H. Joos: *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung*, Teubner
- [6] G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B 153 (1979) p. 365-401
- [7] A. Denner, Fortsch. Phys. 41 (1993) 307

Index

- 1-Teilchen-irreduzibel, 196
- 1-Teilchen-irreduziblen Selbstenergie, 197
- 1-Teilchen-reduzibel, 196
- 1/N - Entwicklung, 138
- 2-Körper-Phasenraumelement, 96

- Asymptotische Zustände, 60
- Austauschteilchen
 - massive, 132

- Baryonenzahl, 164
- Basis
 - chirale, 14
 - Weyl, 14
- Baumgraphen, 76
- bi-unitären Transformation, 159
- Boost, 8
- Born'sche Näherung, 78
- Bosonen, 34

- Casimir-Operator, 129
 - quadratischer, 129
- Casimir-Operatoren, 129
- CP-Asymmetrie
 - Mischungsinduzierte, 168, 172
- Crossing, 123

- Dalitz-Plot, 97, 98
- Darstellung, 128
 - adjungierte, 128
- Dilogarithmen, 192
- Dimension, 5
- Dimension , 127
- dimensionalen Regularisierung, 184
- Dirac-Basis, 22
- direkte CP-Asymmetrie, 166
- direkten CP-Asymmetrie, 172
- Down-Massenmatrix, 160
- Dynkin-Index, 128
- Dyson-Reihe, 53

- Eichfelder, 109
- Eichkopplung, 109
- Eichprinzip, 108

- Eichtheorien
 - nichtabelsche , 127
- Eichtransformation
 - U(1)-, 108
- Eichunabhängigkeit, 112
- Eichung
 - unitäre, 155
- Elektroschwache Baryogenese, 179
- elektrischen Ladung, 148
- elektroschwache Phasenübergang, 178
- Energie-Impuls-Tensor, 25
- euklidisch, 100
- euklidischen Impuls, 190
- Euler-Lagrange-Gleichungen, 18

- faktoriert, 140
- farb-erlaubt, 141
- farb-unterdrückt, 141
- Farbe, 91, 132
- Feldoperator, 33
- Feldstärketensor, 22
- Feynman
 - Graphen, 41
 - Propagator, 46
 - Regeln, 67
 - für Dirac-Felder, 80
 - Impulsraum-, 75
 - Ortsraum-, 74
- flavour-ändernden neutralen Ströme, 162
- flavour-diagonal, 160
- flavour-spezifischer, 171
- Fockraum, 41

- Gell-Mann-Matrizen, 136
- Gell-Mann-Nishima-Relation, 148
- Generatoren, 127
- GIM-Mechanismus, 162
- Goldstone-Bosonen, 142
- Gram-Determinante, 189
- Green-Funktion, 51
- Greenfunktion
 - connected, 198
 - zusammenhängende, 198

- Zweipunkt-, 55
- Händigkeit
 - linkshändig, 15
 - rechtshändig, 15
- Hamilton-Dichte, 26
- Hyperladung, 147
- innere Impulse, 75
- invariante Masse, 95
- irreduzibel, 128
- irreduziblen, 141
- Jacobi-Identität, 127
- Källén-Lehmann-Spektraldarstellung, 58
- kinematisch verboten, 73
- Klein-Gordon-Gleichung
 - freie, 62
- Kobayashi-Maskawa Phase, 163
- Kontraktion, 64
- Lagrangedichte, 18
- Lebensdauer, 84
- Lehmann-Symanzik-Zimmermann, 194
- Lepton-Zahlen, 164
- Lie-Algebra, 127
- Lie-Gruppe, 127
- Loop, 75
- Loop-Impulse, 77
- Lorentz-Bedingung, 110
- LSZ-Faktor, 198
- LSZ-Formel, 199
- Mandelstam-Variablen, 125
- Masse
 - bare, 197
 - nackte, 197
 - physikalische, 197
 - Pol-, 197
 - unrenormierte, 197
- Massen-Term, 20
- Masseneigenzustände, 161
- Massenmatrix, 143, 169
- Massenterm
 - Dirac-, 21
 - Majorana-, 21
- Massenterme, 160
- Matrizelement, 84
- Mikrokausalität, 44
- Mischungssymmetrie, 171
- nichtabelsch, 127
- nichtkommutativ, 127
- Noether-Theorem, 24
- Normalordnung, 34
- Pauli-Lubanski-Vektor, 16
- planare, 138
- Polarisation
 - skalare, 111
 - skalarer, 113
- Polarisationssumme, 87
- Prinzip der extremalen Wirkung, 18
- Proca-Feld, 22
- Prozesse
 - s - Kanal, 126
- Quark-Flavours, 136
- Rang, 136
- Rapidität, 8
- reell, 131
- regularisiert, 184
- Residuum des 1-Teilchen-Pols, 198
- S-Matrix, 61
- Schleife, *siehe* Loop
- Schleifendiagramm, 76
- schleifeninduziert, 180
- Schleifenkorrekturen, 181
- Schnitt, 121
- Schursches Lemma, 129
- schwache Isospin, 132
- schwachen Konvergenz, 61
- schwacher Isospin, 147
- semileptonischen CP-Asymmetrie, 175
- skalare Integral, 183
- Sphaleronen, 177
- Spin-Statistik-Theorem, 44
- Spin-Summe, 50
- Spinoren, 49
- spontan gebrochen, 142
- spontan gebrochene, 141

Störungstheorie, 62
starker Phasenübergang, 180
Stoßparameter, 101
Strahlungseichung, 112
Strahlungskorrekturen, 78
Streuamplitude, 41
Streumatrix, 61
Streuquerschnitt
 totaler, 100
Stromoperatoren, 140
Strukturkonstanten, 127
Symmetrie
 chirale, 142
 lokale innere $SU(N)$ - , 132
Symmetriebrechung
 dynamischer , 144
Symmetrien
 äußere Symmetrien, 20
 innere Symmetrien, 20
symplektische Form, 131

Tachyonen, 17
Teilchen
 masseloses, 17
 massives, 17
 virtuelle, 43
Tensorintegral, 183
Totale Zerfallsrate, 90
Transformation
 lokale $U(1)$ -, 108
Transformationen
 globale, 24
trunkierten Greenfunktion, 198

 $U(3) \times U(3)$ -Flavour-Symmetrie, 158
up-Massenmatrix, 161

Vakuum-Blasen, 195
Vakuumserwartungswert, 142
Vektorfeld, 22
Vektorintegral, 183

Ward-Identität
 QED-, 116, 120
Wechselwirkungsbild, 52
Wechselwirkungszuständen, 161

Weinberg-Winkel, 151
Wellenpaket, 41
Wick'sches Theorem, 64

Yang-Mills-Theorien, 132
Yukawa-Wechselwirkung, 83

zeitabhängige CP-Asymmetrie, 171
Zeitentwicklungsoperator, 53
Zerfallsbreite
 sichtbare, 92
Zerfallsrate, 84
zusammengesetzter Operator, 145